Kochen mit Jordan

Vorbereitungen

Man nehme eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und bestimme ihr *charakteristisches Polynom*

$$p(\lambda) = (\lambda - c_1)^{r_1} \cdots (\lambda - c_j)^{r_j} \quad \in \mathbb{C}[X]$$

Dabei gilt:

$$\boxed{\text{algebraische Vielfachheit } r_j \;\hat{=}\; \text{Länge des Jordanblocks zu } c_j}$$

Ferner gilt für den *Eigenraum* zum Eigenwert c_j:

$$E_{c_j} = \mathrm{Kern}(A - c_j \cdot I)$$

Daraus erhalten wir die Erkenntnis:

$$\boxed{\dim E_{c_j} = \dim \mathrm{Kern}(A - c_j \cdot I) = \text{ Anzahl der Kästchen im Block zu } c_j}$$

Aus der Dimensionsformel kann man analog folgern:

$$\boxed{n - \dim \mathrm{Bild}(A - c_j \cdot I) = n - \mathrm{rg}(A - c_j \cdot I) = \text{ Anzahl der Kästchen im Block zu } c_j}$$

Schnellzubereitung

Wenn es nur darum geht, eine JNF zu bestimmen, reichen obige Informationen oft schon aus, wenn man auch noch bedenkt:

- Ähnliche Matrizen haben den selben Rang
- Ähnliche Matrizen haben die selbe Determinante
- Ähnliche Matrizen haben die selbe Spur

Sprich: Die ursprüngliche Matrix A und die gesuchte JNF haben selben Rang, selbe Determinante und auch noch die selbe Spur.

So kann man sich in der Regel schnell und kostengünstig eine JNF zusammenrühren.

JNF für Genießer — wenn's noch etwas mehr sein darf

Wird zudem eine Basis gesucht, die einem diese JNF zur Verfügung stellt, muss man etwas mehr Arbeit investieren.

Im folgenden wenden wir uns nun mal speziell dem Eigenwert $c_1 =: c$ zu. Für die restlichen Eigenwerte muss man unten stehendes Prozedere genauso durchführen.

Nun bestimme man (bei Bedarf) zusätzlich

$$\mathrm{Kern}(A - c \cdot I)^2,\ \mathrm{Kern}(A - c \cdot I)^3, \ldots$$

und zwar solange, bis sich die Dimension des Kernes nicht mehr ändert.[1] Zudem bestimme man für jeden Kern eine (möglichst einfache) Basis.

Gesucht ist dann die kleines Zahl p für die gilt:

$$\mathrm{Kern}(A - c \cdot I)^p = \mathrm{Kern}(A - c \cdot I)^{p+1}$$

[1] Wer dennoch Feuer und Flamme ist, darf natürlich noch mehr Potenzen ausrechnen. Niemand sei daran gehindert.

sprich: die kleinste Potenz, ab der sich nix mehr verändert.[2] Jene Zahl p ist zudem netterweise der Exponent im *Minimalpolynom* zu diesem Eigenwert c_1 und:

$$\boxed{p \;=\; \text{Länge des größten Kästchens zum Eigenwert } c}$$

Spätestens jetzt sollte man sich in groben Zügen klargemacht haben, wie denn die JNF aussehen wird. Dieses Wissen kann sehr hilfreich bei der Bestimmung einer Basis sein! Dabei gilt die Konvention:

- Die größten Kästchen sind oben
- Die Einser stehen unter der Diagonalen in der sog. ersten Nebendiagonalen

Nun betrachte man die Basisvektoren, die man oben mal für die vielen Kerne ausgerechnet hat. Jetzt nimmt man die Basisvektoren aus $\text{Kern}(A - c \cdot I)^p$, die im $\text{Kern}(A - c \cdot I)^{p-1}$ *nicht* drin sind. Nennen wir diese mal $v_1, v_2, \ldots$ Es gilt also:

$$\text{Kern}(A - c \cdot I)^p = \text{Kern}(A - c \cdot I)^{p-1} \oplus \langle v_1, v_2, \ldots \rangle$$

Jetzt nehmen wir $v_1,\ (A - c \cdot I) \cdot v_1,\ (A - c \cdot I)^2 \cdot v_1, \ldots, v_2,\ (A - c \cdot I) \cdot v_2,\ (A - c \cdot I)^2 \cdot v_2, \ldots$ und schreiben diese in genau jener Reihenfolge in eine (geordnete) Basis.

Ein wichtiger Punkt:

$$\boxed{\text{Zu einem Kästchen der Länge } k \text{ gehören Basisvektoren aus } \text{Kern}(A - c \cdot I)^k}$$

Haben wir alle diese Basisvektoren abgearbeitet, gehen wir eine Stufe tiefer und betrachten

$$\text{Kern}(A - c \cdot I)^{p-1}.$$

1. Ist überhaupt ein Kästchen der Länge $p-1$ zu erwarten? (siehe obiger Kasten) Wenn nein, dann machen wir mit $p-2$ weiter.
2. Wenn ein solches Kästchen zu erwarten ist, dann betrachten wir diejenigen Basisvektoren $w_1, w_2, \ldots$, welche in $\text{Kern}(A - c \cdot I)^{p-1}$, aber im $\text{Kern}(A - c \cdot I)^{p-2}$ *nicht* enthalten sind[3], also

   $$\text{Kern}(A - c \cdot I)^{p-1} = \text{Kern}(A - c \cdot I)^{p-2} \oplus \langle w_1, w_2, \ldots \rangle$$

   und führen obiges Prozedere mit denen auch durch.

   Zu beachten ist außerdem: Die Potenz von $(A - c \cdot I)$, mit der man die Basisvektoren jedes Mal multipliziert, nimmt mit jeder „Stufe“ ab. Betrachtet man die Vektoren aus $\text{Kern}(A - c \cdot I)^{p-2}$, welche in $\text{Kern}(A - c \cdot I)^{p-1}$ nicht drin sind, so muss $(A - c \cdot I)$ die Potenzen von 1 bis $p-2$ durchlaufen.

Dieses Muster führt man solange durch, bis man beim $\text{Kern}(A - c \cdot I)$ angelangt ist.

Wenn zum Schluss noch ein paar Vektoren zur Basis fehlen, dann suchen wir uns nach gusto einen oder mehr zur bereits gebildeten Basis linear unabhängigen Vektoren aus $\text{Kern}(A - c \cdot I)$ raus.

Am Ende sollten auf jeden Fall n linear unabhängige Basisvektoren nebeneinander in Reih und Glied dastehen, nicht mehr und nicht weniger. Dann klappts auch mit dem Korrektor.

Beispiele

1. Was kurzes ...

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I) = (1 - \lambda)^4$$

[2] $\text{Kern}(A - cI)^p$ nennt man dann in Fachkreisen „Hauptraum“.

[3] Es versteht sich meines Erachtens von selbst, dass diese neuen Vektoren natürlich unabhängig von den bereits gesammelten Vektoren sein müssen, da sonst der Witz der Basis verloren gehen würde ...

$$(A - 1 \cdot I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (A - I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Kern}(A - I) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \operatorname{Kern}(A - I)^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$
$$\operatorname{Kern}(A - I)^3 = \mathbb{R}^4$$

Da ja $\dim \operatorname{Kern}(A - I)^3 = \dim \operatorname{Kern}(A - I)^{3+1} = \dim \operatorname{Kern}(A - I)^{3+2} = \ldots$ gilt, so hat also das längste Jordan–Kästchen die Länge 3. Somit ergibt sich für die Jordan–Normalform:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Nun gehts an die Basis.

Da wir ein Kästchen der Länge 3 haben, wählen wir nun einen Vektor, der in $\operatorname{Kern}(A - I)^3$ liegt, aber nicht in $\operatorname{Kern}(A - I)^2$. Der Einfachheit halber soll dies $j_1 := (1, 0, 0, 0)^t$ sein.[4] Es gilt also:

$$\operatorname{Kern}(A - I)^3 = \operatorname{Kern}(A - I)^2 \oplus \langle j_1 \rangle$$

Die ersten Elemente der gesuchten (geordneten) Jordan–Basis lauten also:

$$\left\{ j_1,\ (A - I) \cdot j_1,\ (A - I)^2 \cdot j_1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Hier ist nix mehr zu holen, darum gucken wir eine Stufe tiefer. Doch halt! Wir haben kein Kästchen der Länge 2, also interessiert uns der $\operatorname{Kern}(A - I)^2$ gar nicht und wir sind eigentlich fertig. Leider haben wir bis dato nur drei Basisvektoren zu einem ansonsten 4-dimensionalen Raum. Also schauen wir zum Schluss in den Kern von $(A - I)$ und suchen uns dort einen Vektor aus, der zu den bisherigen drei linear unabhängig ist. Zwei haben wir zur Auswahl, welchen wir nehmen, ist letztendlich egal. Spontan entscheiden wir uns für $j_2 := (1, 0, 0, -1)^t$.

Für die Jordan–Basis ergibt sich also:

$$\left\{ j_1,\ (A - I) \cdot j_1,\ (A - I)^2 \cdot j_1,\ j_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Die Basiswechsel– oder Transformationsmatrix lautet folglich

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[4] Bitte beachten: Man muss *alle* möglichen Vektoren nehmen, nur ist es in diesem Fall nur einer

2. Etwas voluminöser ...

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist für Studenten geradezu prädestiniert, da man ohne Kalorienaufwand erkennt:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I) = (3 - \lambda)^3 \cdot (2 - \lambda)^2$$

Erste Erkenntnis daraus:

- Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 2$.
- Es gibt einen Block zum Eigenwert 3 der Länge 3, da dies die algebraische Vielfachheit dieser Nullstelle des Polynoms ist.
- Es gibt einen Block zum Eigenwert 2 der Länge 2. Argumentation wie oben.

Betrachten wir nun zuerst die Eigenräume.

Für $\lambda_1 = 3$:

$$(A - 3 \cdot I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \operatorname{Kern}(A - 3 \cdot I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Für $\lambda_2 = 2$:

$$(A - 2 \cdot I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \operatorname{Kern}(A - 2 \cdot I) = \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Zweite Erkenntnis daraus:

- Es gibt nur ein Kästchen zum Eigenwert 3. $\big(\dim \operatorname{Kern}(A - 3I) = 1\big)$
- Es gibt auch nur ein Kästchen zum Eigenwert 2. $\big(\dim \operatorname{Kern}(A - 2I) = 1\big)$

Dritte Erkenntnis: Die Jordan–Normalform lautet folglich:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & & \\ 1 & 3 & 0 & & \\ 0 & 1 & 3 & & \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nun zur Basis.

Wir wenden uns nun zuerst dem Eigenwert $\lambda_1 = 3$ zu: Dazu brauchen wir noch ein paar Kerne.

$$(A - 3 \cdot I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ Kern}(A - 3 \cdot I)^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(A - 3 \cdot I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ Kern}(A - 3 \cdot I)^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

So, mehr brauchen wir hier nicht, denn wir wissen, dass hieraus der Vektor für das 3er–Kästchen stammen muss. (siehe Rezept) Suchen wir uns also einen Vektor, der in $\text{Kern}(A-3\cdot I)^3$ liegt, aber nicht in $\text{Kern}(A-3\cdot I)^2$. Der Blick fällt spontan auf den 3. Einheitsvektor. Diesen multiplizieren wir nach unserem Muster mit $(A-3\cdot I)$ und $(A - 3 \cdot I)^2$. Für die zukünftige JNF–Basis folgt daraus:

$$\left\{e_3,\ (A - 3 \cdot I) \cdot e_3,\ (A - 3 \cdot I)^2 \cdot e_3, \ldots\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \right\}$$

So, für den Block zum Eigenwert 3 haben wir schon 3 Basisvektoren gefunden, und wir können uns eine weitere Suche hier sparen.

Machen wir mit dem Eigenwert $\lambda_2 = 2$ weiter.

$$(A - 2 \cdot I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Kern}(A - 2 \cdot I)^2 = \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Hier können wir schon bei der 2. Potenz aufhören, da der Block zum Eigenwert 2 ja auch nur die Länge 2 hat. Ein Vektor muss nun her, und zwar so einer, der im Kern von $(A - 2 \cdot I)^2$ liegt, aber nicht im Kern von $(A - 2 \cdot I)$. Auch hier sieht man den Kandidanten schnell: $j := (6, 2, -2, 0, -1)^t$. Auch diesen lassen wir durch unser Kochrezept laufen, müssen ihn also noch mit $(A - 2 \cdot I)$ multiplizieren und sind eigentlich fertig.

Denn: Die Basis lautet also

$$\left\{e_3,\ (A - 3 \cdot I) \cdot e_3,\ (A - 3 \cdot I)^2 \cdot e_3,\ j,\ (A - 2 \cdot I) \cdot j\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Die Transformationsmatrix hat demnach die Gestalt:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein dicker Brocken ...

Von Dr. Kühnlein stammt folgende Matrix, die wir aber nicht vollständig auseinandernehmen; wir wollen nur noch auf einen speziellen Punkt aufmerksam machen.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & -10 & 8 & -6 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -10 & 8 & -6 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -10 & 8 & -6 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -9 & 8 & -6 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 8 & -6 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & -5 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & -4 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese herrliche Matrix ist nilpotent, sprich eine Potenz von A ist null, genauer: $A^3 = 0$. Dies bedeutet ferner:

- Es kann nur einen geben: Den Eigenwert 0.
- Das größte vorkommende Kästchen hat die Länge 3, da sich eben ab der 3. Potenz von $(A - 0 \cdot I) = A$ die Dimension des Kernes nicht mehr ändert.

Zudem sei gesagt, dass die Dimension von $\mathrm{Kern}(A - 0 \cdot I) = \mathrm{Kern}\, A$ hier 4 ist.

Nun stellt sich die Frage, wie denn die Jordan-Normalform aussehen soll. Es gibt nämlich zwei Möglichkeiten:

1. Links oben ein 3er-Kästchen. Dann noch ein 3er-Kästchen und zwei 1er-Kästchen.
2. Links oben ein 3er-Kästchen. Dann zwei 2er-Kästchen und ein 1er-Kästchen.

Was nun? Auch die Hilfsmittel Spur, Determinante und Rang helfen bei der Entscheidung nicht weiter.

Wir wissen jedoch, dass zu einem 3er-Kästchen ein Basisvektor aus dem Kern von $(A - \lambda \cdot I)^3$ gehören muss.[5] Da jedoch $\dim \mathrm{Kern}\, A^3 - \dim \mathrm{Kern}\, A^2 = 1$ ist, finden wir nur einen Vektor für unser Kochrezept, der uns so ein 3er-Kästchen liefern könnte. Daraus folgt:

2. Links oben ein 3er-Kästchen. Dann zwei 2er-Kästchen und ein 1er-Kästchen.

Dabei belassen wir es mal. Die Berechnung einer Basis sei dem geneigten Leser überlassen.

Dieses Kochrezept entstand nach einem Mitschrieb im Tutorium. Alle Angabe ohne Gewähr, für die Richtigkeit gebe ich keine Garantie. Ich danke Dr. Kühnlein und Dr. Schmithüsen für Korrekturen und Anregungen. Weitere Materialien und die aktuelle Version dieses Dokuments gibt es auf der Seite `http://www.danielwinkler.de/la/`

Daniel Winkler

[5] ... zu einem 2er-Kästchen ein Vektor aus dem $\mathrm{Kern}(A - \lambda \cdot I)^2$, zu einem 1er-Kästchen ein Vektor aus $\mathrm{Kern}(A - \lambda \cdot I)^1$ usw ...