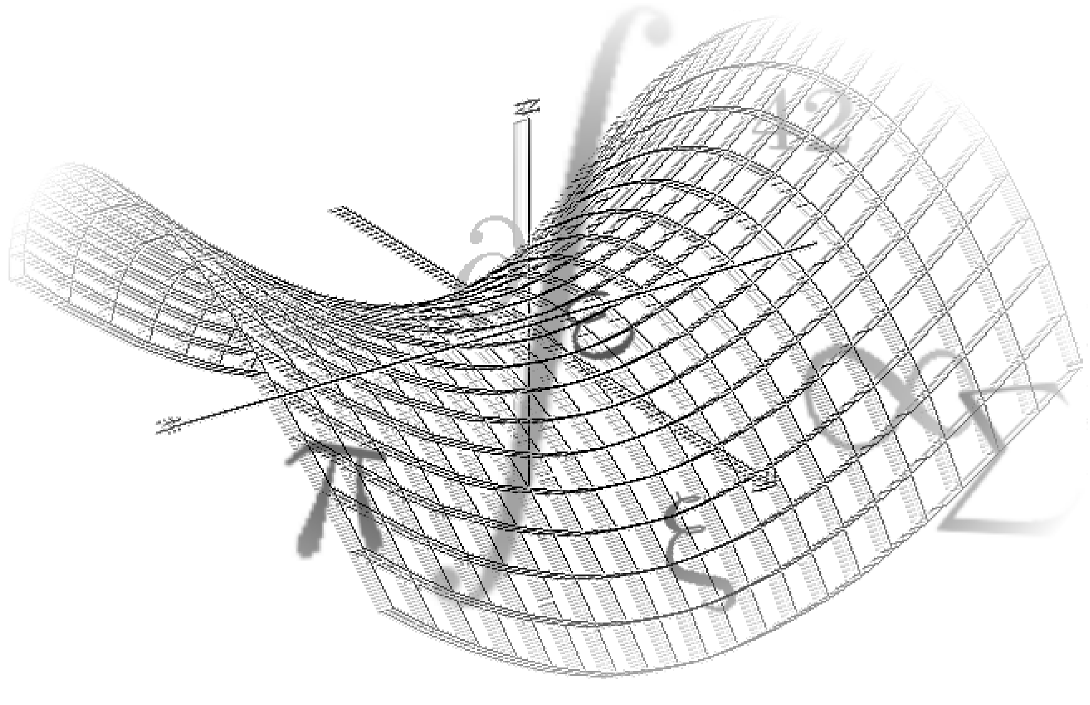
# Höhere Math$\varepsilon$matik für Informatiker

Inoffizielles Skriptum zur Vorlesung Höhere Mathematik für Informatiker basierend auf Vorlesungen an der Universität Karlsruhe (TH) 2000 – 2004



# Inhaltsverzeichnis

# Tabellenverzeichnis





Dieses Skriptum erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit. Einige Beweise, die in den Saalübungen geführt wurden, sind nicht enthalten.

Kommentare, Fehler, Patches und Vorschläge bitte an post@danielwinkler.de senden. Bei Fehlern bitte *nicht* die Seitenzahl sondern die Nummer des Satzes, der Abbildung etc. sowie die Revisionsnummern angeben.

Die aktuelle Version dieses Dokuments sowie die Quelldateien hierzu sind unter der Web-Adresse http://www.danielwinkler.de/hm/ zu finden.

Dieses inoffizielle Skriptum basiert auf dem Mitschrieb von Daniel Winkler zu den Vorlesungen an der Universität Karlsruhe[1] in den Jahren 2000 und 2001 von Prof. M. Plum. Kombiniert wurde er durch Markus Westphal und Sebastian Reichelt mit Material aus den Vorlesungen in den Jahren 2002 bis 2004 von HDoz. Dr. P. Kunstmann und AOR Dr. Ch. Schmoeger.

Sowohl die Konzeption als auch das Manuskript der genannten Vorlesungen stammen allein von AOR Dr. Ch. Schmoeger.

Weitere Korrekturen und Ergänzungen wurden eingebracht von Julian Dibbelt, Martin Röhricht, Christian Senger, Norbert Silberhorn, Johannes Singler und Richard Walter.

| **Teil** | **Rev.** |
|---|---|
| Layout | 282 |
| HM 1 | 289 |
| HM 2 | 291 |
| Anhang | 256 |

[1] heute: Karlsruher Institut für Technologie, KIT

*Don't panic!*

# Teil I.

# Eindimensionale Analysis

# 0. Vorbemerkungen

## 0.1. Mengen

Eine *Menge* ist nach Cantor eine Zusammenfassung $M$ von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche *Elemente* von $M$ genannt werden) zu einem Ganzen.

**Notation:** geschweifte Klammern $\{\}$

**Beispiel 0.1.** Notationen:

- $M = \{1, 2, 3\}$
- $M = \{x : x \text{ ist Vielfaches von } 7\}$ oder $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ Vielfaches von } 7\}$

Weitere Grundnotation: Doppelpunkt zur Kennzeichnung von *Definitionen*.

**Beispiel 0.2.** Wollen die Funktion $f$ definieren. Schreibe (z.B.) $f(x)\mathbf{:}= x^2$. Nur bei einer Neudefinition, nicht bei einer Gleichung. Oder: $a\mathbf{:}= 15$, $f$ heißt *injektiv*$\mathbf{:}\Leftrightarrow$ Für alle $a, \tilde{a} \in M$ mit $a \neq \tilde{a}$ gilt ...

| | |
|---|---|
| $a \in M$ (oder $M \ni a$): | $a$ ist Element von $M$; $M$ enthält $a$ |
| $a \notin M$ (oder $M \not\ni a$): | analog s.o. |
| $M = N$: | $M$ enthält die selben Elemente wie $N$ |
| $M \neq N$: | analog s.o. |
| $M \subset N$ (oder $M \subseteq N$): | $M$ ist Teilmenge von $N$, d.h. jedes Element von $M$ ist auch ein Element von $N$; Gleichheit der Mengen ist erlaubt. |
| $N \supset M$ (oder $N \supseteq M$): | $N$ ist Obermenge von $M$; analog |
| $M \subsetneqq N$: | $M$ ist echte Teilmenge von $N$; $M \neq N$ |
| $\emptyset$: | leere Menge |

$$\begin{array}{lcll} M \cup N & = & \{a : a \in M \text{ oder } a \in N\} & \text{(Vereinigungsmenge)} \\ M \cap N & = & \{a : a \in M \text{ und } a \in N\} & \text{(Schnittmenge)} \\ M \setminus N & = & \{a : a \in M \text{ und } a \notin N\} & \text{(Komplementmenge)} \end{array}$$

$M, N$ heißen *disjunkt*, wenn $M \cap N = \emptyset$
$\mathcal{P}(M) = \{N : N \subset M\}$: Potenzmenge von $M$ (Menge aller Teilmengen)

**Beispiel 0.3.** Beispiel für die Potenzmenge von $M = \{1, 2\}$:

$$\mathcal{P}(M) = \big\{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\big\}$$

## 0.2. Abbildungen

Seien $M, N$ Mengen. Eine *Abbildung* oder *Funktion* $f$ von $M$ nach $N$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $a \in M$ in eindeutiger Weise ein $f(a) \in N$ zuordnet.

**Notation:** $f : M \to N,\ a \mapsto f(a)$

**Beispiel 0.4.**

$$M = N = \mathbb{R}, \quad f : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right\}$$

$f_1 : M_1 \to N_1$ und $f_2 : M_2 \to N_2$ heißen *gleich* (kurz $f_1 \equiv f_2$) (identisch), wenn $M_1 = M_2$, $N_1 = N_2$ und $f_1(a) = f_2(a)$ für alle $a \in M_1$.

$f : M \to N$ heißt

- *injektiv*, wenn für alle $a, \tilde{a} \in M$ mit $a \neq \tilde{a}$ gilt: $f(a) \neq f(\tilde{a})$; ($x \mapsto x$ ist injektiv, $x \mapsto x^2$ nicht)
- *surjektiv*, wenn für alle $\tilde{a} \in N$ ein $a \in M$ existiert mit $f(a) = \tilde{a}$ ($\Rightarrow$ die Bildmenge wird voll ausgeschöpft)
- *bijektiv*, wenn $f$ sowohl injektiv als auch surjektiv ist; eineindeutige Zuordnung

Für $M_1 \subset M$ heißt $f(M_1) = \{f(a) : a \in M_1\}$ *Bildmenge* von $M_1$ (unter $f$).

Für $N_1 \subset N$ heißt $f^{-1}(N_1) = \{a \in M : f(a) \in N_1\}$ *Urbildmenge* von $N_1$ (unter $f$).

Sind $f : M \to N$ und $g : N \to P$ Abbildungen, so heißt die Abbildung

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} M & \to & P \\ a & \mapsto & g(f(a)) \end{array} \right\}$$

*Hintereinanderausführung* von $f$ und $g$.

## 0.3. Aussagen

Unter einer *Aussage* verstehen wir ein sprachliches oder gedankliches Gefüge, welches entweder wahr oder falsch ist.

**Beispiel 0.5.**

- „4 ist eine gerade Zahl“ ist eine wahre Aussage.
- „Bananen sind kugelförmig“ ist eine falsche Aussage.
- „Nachts ist es kälter als draußen“ ist keine Aussage.
- „Es gibt unendlich viele Sterne“ ist eine Aussage, die wahr oder falsch sein kann.

Sind $A$, $B$ Aussagen, so sind die Aussagen $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \dot{\vee} B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ erklärt durch:

| | |
|---|---|
| $\neg A$: | $A$ ist falsch (Negation) |
| $A \wedge B$: | $A$ und $B$ sind beide wahr (und) |
| $A \vee B$: | $A$ oder $B$ ist wahr (oder) |
| $A \dot{\vee} B$: | entweder $A$ oder $B$ ist wahr (excl. oder) |
| $A \Rightarrow B$: | aus $A$ folgt $B$; wenn $A$ wahr ist, dann ist auch $B$ wahr (Implikation)<br>(ist immer wahr, wenn $A$ falsch ist; ist nur dann falsch, wenn $B$ falsch ist)<br>Bsp: „Wenn Bananen kugelförmig sind, ist 4 gerade.“ $\Rightarrow$ eine wahre Aussage. |
| $A \Leftrightarrow B$: | $A$ ist genau dann wahr, wenn $B$ wahr ist. (Äquivalenz) |

Sei $M$ eine Menge und $E$ eine Eigenschaft, die ein Element $a \in M$ haben kann. Dann sind folgende Aussagen machbar:

- $\forall_{a \in M}$ $a$ hat die Eigenschaft $E$; jedes $a \in M$ hat die Eigenschaft $E$
  ($\forall$ heißt *All-Quantor*)

- $\exists_{a\in M}$ $a$ hat die Eigenschaft $E$; es existiert ein $a \in M$ mit der Eigenschaft $E$ ($\exists$ heißt *Existenzquantor*)
- $\exists^1_{a\in M}$ $a$ hat die Eigenschaft $E$; es existiert *genau ein* $a \in M$ mit der Eigenschaft $E$

Grundsätzliches Ziel der Mathematik: Möglichst viele nichttriviale Aussagen über gewisse Objekte. Ein solches gedankliches Gebäude kann nicht aus dem „Nichts“ kommen. Start des mathematischen Denkens: Grundannahmen, *Axiome*, die nicht bewiesen werden können.

Insbesondere brauchen wir Axiome, die uns die *Zahlen* liefern.

Möglichkeiten:

- PEANO-*Axiome* liefern die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, daraus lassen sich ganze Zahlen und rationale Zahlen *konstruieren*. Ein weiteres Axiom liefert die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, woraus auch die komplexen Zahlen konstruierbar sind.
- Wir können die Axiome sofort auf der Ebene der reellen Zahlen fordern. Das wollen wir auch im Folgenden tun.

# 1. Zahlen

## 1.1. Reelle Zahlen

Axiomatische Forderung: Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$, genannt die Menge der reellen Zahlen, mit folgenden Eigenschaften:

## 1.2. Axiome der reellen Zahlen

### 1.2.1. Körperaxiome

In $\mathbb{R}$ seien zwei Verknüpfungen $+, \cdot$ gegeben, die jedem Paar $a, b \in \mathbb{R}$ genau ein $a+b \in \mathbb{R}$ und ein $a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnen. Dabei soll gelten:

#### A1: Assoziativgesetz der Addition

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a+b)+c \;=\; a+(b+c)$$

#### A2: neutrales Element der Addition

$$\exists 0 \in \mathbb{R}\; \forall a \in \mathbb{R} \quad a+0=a$$

#### A3: inverses Element der Addition

$$\forall a \in \mathbb{R}\; \exists (-a) \in \mathbb{R} \quad a+(-a)=0$$

#### A4: Kommutativgesetz der Addition

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a+b=b+a$$

A1 bis A4 ergibt: $(\mathbb{R}, +)$ ist eine *kommutative Gruppe*.

#### A5: Assoziativgesetz der Multiplikation

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a \cdot b) \cdot c \;=\; a \cdot (b \cdot c)$$

#### A6: neutrales Element der Multiplikation

$$\exists 1 \in \mathbb{R}\; \forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = a, \quad 1 \neq 0$$

#### A7: inverses Element der Multiplikation

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} \quad a \cdot a^{-1} = 1$$

#### A8: Kommutativgesetz der Multiplikation

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

A5 bis A8 ergibt: $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine *kommutative Gruppe*

#### A9: Distributivgesetz

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b + c) \ = \ a \cdot b + a \cdot c$$

A1 bis A9 ergibt: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein *Körper*.

Alle bekannten Regeln der Grundrechenarten lassen sich aus A1 bis A9 herleiten und seien von nun an bekannt.

**Schreibweise:**

Für $a, b \in \mathbb{R}$:

$ab := a \cdot b$

$a - b := a + (-b)$

falls $a \neq 0$ : $\frac{b}{a} := ba^{-1}$

**Beispiel 1.1.**

(1) Das Nullelement 0 ist eindeutig:
Sei $\tilde{0}$ weiteres Element mit $\forall a \in \mathbb{R}\ \ a + \tilde{0} = a$
Dann: $\tilde{0} = \tilde{0}0 = 0\tilde{0} = 0$

(2) $\forall a \in \mathbb{R}\ \ a \cdot 0 = 0$:
$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \qquad | -(a \cdot 0)$
$0 = a \cdot 0$

(3) $\forall a \in \mathbb{R}\ \ a^2 = (-a)^2$ (wobei: $a^2 = a \cdot a$):

$$\begin{aligned} a^2 &= a \cdot a \ = \ a \cdot (a + a - a) \ = \ a \cdot (a + a) + a \cdot (-a) \\ &= a \cdot (a + a) + (-a) \cdot (a + a - a) \ = \ a \cdot (a + a) + (-a) \cdot (a + a) + (-a) \cdot (-a) \\ &= (a + a) \cdot (a - a) + (-a)^2 \ = \ (a + a) \cdot 0 + (-a)^2 \ = \ (-a)^2 \end{aligned}$$

### 1.2.2. Anordnungsaxiome

In $\mathbb{R}$ ist eine Relation $\leq$ gegeben, für die gilt:

#### A10

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \big[a \leq b \ \vee \ b \leq a\big]$$

#### A11

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \big[(a \leq b \ \wedge \ b \leq a) \ \Rightarrow \ a = b\big]$$

**A12**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad \big[(a \leq b \,\wedge\, b \leq c) \;\Rightarrow\; a \leq c\big]$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ ist eine total geordnete Menge.

**A13**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad \big[(a \leq b) \;\Rightarrow\; (a + c \;\leq\; b + c)\big]$$

**A14**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad \big[(a \leq b \,\wedge\, 0 \leq c) \;\Rightarrow\; a \cdot c \;\leq\; b \cdot c\big]$$

Schreibweisen:

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R} \quad & b \geq a :\Leftrightarrow a \leq b \\ & a < b :\Leftrightarrow (a \leq b \,\wedge\, a \neq b) \\ & b > a :\Leftrightarrow a < b \end{aligned}$$

Alle bekannten Regeln für Ungleichungen lassen sich aus A1 bis A14 herleiten und seien von nun an bekannt.

**Beispiel 1.2.**

(1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad \big[(a \leq b \wedge c \leq 0) \;\Rightarrow\; a \cdot c \geq b \cdot c\big]$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} & c \leq 0 \;\Rightarrow\; 0 \leq -c \\ & \Rightarrow \;\; a \cdot (-c) \;\leq\; b \cdot (-c) \\ & \Rightarrow \;\; bc \;\leq\; ac \end{aligned}$$

□

(2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad \big[(a \leq b \wedge c > 0) \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c\big]$

Betrag einer reellen Zahl:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad |a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| $\lvert a\rvert$ | : Abstand von $a$ zur 0 |
| $\lvert a-b\rvert$ | : Abstand zwischen $a$ und $b$ |

(1) $|a| \geq 0$

(2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(3) $|a| = |-a|$

(4) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(5) $a \leq |a|, -a \leq |a|$

(6) Dreiecksungleichung:
$\boxed{|a + b| \;\leq\; |a| + |b|}$

(7) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

**Beweis:** zu (6)

1. Fall: $a + b \geq 0$. Dann:

$$|a+b| = a + b \leq |a| + b \leq |a| + |b|$$

2. Fall: $a + b < 0$ Dann:

$$|a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|$$

$\square$

**Definition 1.3.** Sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$.
$M$ heißt *nach oben beschränkt*

$$:\Leftrightarrow \ \exists \gamma \in \mathbb{R}\, \forall x \in M \quad x \leq \gamma$$

$M$ heißt *nach unten beschränkt*

$$:\Leftrightarrow \ \exists \gamma \in \mathbb{R}\, \forall x \in M \quad x \geq \gamma$$

In diesem Fall heißt $\gamma$ obere Schranke (bzw. untere Schranke) von $M$.

Ist $\gamma$ eine obere Schranke von $M$ und gilt für *jede* weitere obere Schranke $\tilde{\gamma}$ von $M : \gamma \leq \tilde{\gamma}$, (d.h. $\gamma$ ist *kleinste* obere Schranke von $M$), so heißt $\gamma$ das *Supremum* von $M$.

Ist $\gamma$ eine untere Schranke von $M$ und gilt für *jede* weitere untere Schranke $\tilde{\gamma}$ von $M : \gamma \geq \tilde{\gamma}$, (d.h. $\gamma$ ist *größte* untere Schranke von $M$), so heißt $\gamma$ das *Infimum* von $M$.

Falls $M$ ein Supremum hat, so ist nach A11 dieses eindeutig bestimmt. (Infimum analog)

Bezeichnung: $\sup M, \inf M$

Existiert $\sup M$ und gilt $\sup M \in M$, so heißt $\sup M$ auch *Maximum* von $M$ (Bezeichnung $\max M$).

Existiert $\inf M$ und gilt $\inf M \in M$, so heißt $\inf M$ auch *Minimum* von $M$ (Bezeichnung $\min M$).

**Beispiel 1.4.** Intervalle
Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

$$\begin{array}{lcll}
(a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{(offenes Intervall)} \\
[a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & \text{(abgeschlossenes Intervall)} \\
(a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & \text{(halboffenes Intervall)} \\
[a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} & \\
(a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x\} & \\
(-\infty,a) & := & \{x \in \mathbb{R} : x < a\} & \\
(-\infty,a] & := & \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} & \\
(-\infty,\infty) & := & \mathbb{R} &
\end{array}$$

**Beispiel 1.5.** Beispiele von Mengen und deren Schranken:

(1) $M = (1,2)$

obere Schranken: alle Zahlen $\geq 2$
$\sup M = 2, \quad 2 \notin M$, daher existiert das Maximum von M nicht.

untere Schranken: alle Zahlen $\leq 1$
$\inf M = 1, \quad 1 \notin M$, daher existiert das Minimum von M nicht.

(2) $M = (1, 2]$

obere Schranken: alle Zahlen $\geq 2$
$\sup M = 2, \quad 2 \in M \;\Rightarrow\; \max M = 2.$

untere Schranken: alle Zahlen $\leq 1$
$\inf M = 1, \quad 1 \notin M$, daher existiert das Minimum von M nicht.

(3) $M = [2, \infty)$

$\inf M = 2; 2 \in M$, also $\min M = 2$

$\sup M$ exisitert nicht.

**A15** Ist $M \subset \mathbb{R},\ M \neq \emptyset, M$ nach oben beschränkt, so existiert $\sup M$.

**Satz 1.6.** Ist $M \subset \mathbb{R},\ M \neq \emptyset, M$ nach unten beschränkt, so existiert $\inf M$.

**Beweis:** Betrachte $-M := \{-x, x \in M\}$ statt $M$. □

**Definition 1.7.** Sei $M \subset \mathbb{R},\ M \neq \emptyset$.

$M$ heißt *beschränkt*, wenn $M$ nach oben und nach unten beschränkt ist.

Es gilt: $M$ beschränkt $\Leftrightarrow\ \exists c > 0\ \forall x \in M\ \ |x| \leq c$

**Satz 1.8.** Sei $B \subset A \subset \mathbb{R}, B \neq \emptyset$, dann gilt:

(1) Ist $A$ beschränkt, so gilt $\inf A \leq \sup A$

(2) Ist $A$ nach oben beschränkt, so ist auch $B$ nach oben beschränkt und $\sup B \leq \sup A$
Ist $A$ nach unten beschränkt, so ist auch $B$ nach unten beschränkt und $\inf B \geq \inf A$

(3) Ist $A$ nach oben beschränkt und $\gamma$ eine obere Schranke von $A$, so gilt:

$$\gamma = \sup A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A \quad x > \gamma - \varepsilon$$

Ist $A$ nach unten beschränkt und $\gamma$ eine untere Schranke von $A$, so gilt:

$$\gamma = \inf A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A \quad x < \gamma + \varepsilon$$

**Beweis:**

(1) Wähle $x \in A$. Da $\sup A$ obere Schranke von $A$, gilt: $x \leq \sup A$

Da $\inf A$ untere Schranke von $A$, gilt: $x \geq \inf A$

$$\Rightarrow \quad \inf A \leq \sup A$$

(2) (obere Zeile): $\sup A$ ist obere Schranke von $A$, also (wegen $B \subset A$) auch von $B$. Da $\sup B$ *kleinste* obere Schranke von $B$, folgt $\sup B \leq \sup A$.

(3) (obere Zeile):

„$\Rightarrow$“: Sei $\gamma = \sup A$, und sei $\varepsilon > 0$. Da $\gamma - \varepsilon < \gamma$, ist $\gamma - \varepsilon$ keine obere Schranke von $A$. Also existiert ein $x \in A$ mit $x > \gamma - \varepsilon$

„$\Leftarrow$“: Es gelte $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A\ \ x > \gamma - \varepsilon$. Wäre $\gamma$ nicht das Supremum von $A$, so existiert eine kleinere obere Schranke $\tilde{\gamma}$ von $A$. (also $\tilde{\gamma} < \gamma$).

Setze $\varepsilon := \gamma - \tilde{\gamma} > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $x \in A$ mit $x > \gamma - \varepsilon = \gamma - (\gamma - \tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$

$\Rightarrow \tilde{\gamma}$ ist keine obere Schranke von $A$. $\Rightarrow$ Widerspruch. ($\lightning$)

$\square$

## 1.3. Natürliche Zahlen

**Definition 1.9.** $A \subset \mathbb{R}$ heißt *Induktionsmenge* (IM), wenn gilt:

(1) $1 \in A$

(2) $\forall x \in A\ \ x + 1 \in A$

**Beispiel 1.10.** $\mathbb{R}, [1, \infty), \{1\} \cup [2, \infty)$ sind Induktionsmengen.

$\{1\} \cup (2, \infty)$ ist keine Induktionsmenge.

**Definition 1.11.** Die Menge

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &:= \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ für jede Induktionsmenge } A\} = \text{Durchschnitt aller Induktionsmengen}\\ &= \bigcap_{A \text{ IM}} A\end{aligned}$$

heißt *Menge der natürlichen Zahlen.*

**Satz 1.12.**

(1) Ist $A \subset \mathbb{R}$ eine Induktionsmenge, dann gilt: $\mathbb{N} \subset A$

(2) $\mathbb{N}$ ist eine Induktionsmenge.

(3) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.

(4) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \ n > x$

**Beweis:**

(1) Klar nach Definition von $\mathbb{N}$.

(2) Da $1 \in A$ für jede Induktionsmenge $A \subset \mathbb{R}$, gilt auch $1 \in \bigcap_{A \text{ IM}} A = \mathbb{N}$.

Sei $x \in \mathbb{N} = \bigcap_{A \text{ IM}} A$. Also $x \in A$ für jede Induktionsmenge $A$.

Da $x + 1 \in A$ für jede Induktionsmenge $A$, ist $x + 1 \in \bigcap_{A \text{ IM}} A = \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ ist Induktionsmenge.

(3) *Annahme:* $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt. Nach A15 existiert also ein $s := \sup \mathbb{N}$.
$\Rightarrow$ $s - 1$ ist keine obere Schranke von $\mathbb{N}$.
$\Rightarrow$ $\exists x \in \mathbb{N}\ \ x > s - 1$; da $\mathbb{N}$ Induktionsmenge ist, gilt $x + 1 \in \mathbb{N}$, andererseits $x + 1 > s$
$\Rightarrow$ Widerspruch, da $s$ obere Schranke von $\mathbb{N}$.

(4) folgt aus (3).

$\square$

## 1.4. Prinzip der vollständigen Induktion

**Satz 1.13.** Ist $A \subset \mathbb{N}$ und $A$ Induktionsmenge, so ist $A = \mathbb{N}$.

**Beweis:** $\mathbb{N} \subset \tilde{A}$ für jede Induktionsmenge $\tilde{A}$, insbesondere $\mathbb{N} \subset A$. Außerdem ist $A \subset \mathbb{N}$ nach Voraussetzung, also $A = \mathbb{N}$ $\square$

### 1.4.1. Beweisverfahren durch Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ definiert. Es gelte:

(1) $A(1)$ ist wahr.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \big[A(n) \text{ wahr} \Rightarrow A(n+1) \text{ wahr}\big]$

Dann gilt: $\forall n \in \mathbb{N}\ \ A(n)$ ist wahr.

Denn: Setze $A := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$
Nach (1) gilt: $1 \in A$; nach (2) gilt $\forall n \in \mathbb{N}\ \ n+1 \in A$
Also $A$ Induktionsmenge; ferner $A \subset \mathbb{N}$. Also ist nach Prinzip der vollständigen Induktion: $A = \mathbb{N}$, d.h. $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$

**Beispiel 1.14.**

(1) *Behauptung:* $\forall n \in \mathbb{N}\ \ n \geq 1$

**Beweis:** induktiv

$A(n)$ sei die Aussage „$n \geq 1$“.

$A(1)$ ist wahr, da $1 \geq 1$

Sei $A(n)$ wahr, also $n \geq 1$. Dann $n+1 \geq 1+1 \geq 1+0 = 1$ d.h. also $A(n+1)$ ist auch wahr für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}\ \ n \geq 1$. $\square$

(2) Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $m < x < m+1$.

*Behauptung:* $x \notin \mathbb{N}$

**Beweis:** $A := (\mathbb{N} \cap [1, m]) \cup [m+1, \infty)$ ist Induktionsmenge. (Bew. selbst)

$\Rightarrow\ \mathbb{N} \subset A$

*Annahme:* $x \in \mathbb{N}$, denn (wegen $\mathbb{N} \subset A$): $x \in A$, d.h. insbesondere $x \leq m$ oder $x \geq m+1$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme (echt kleiner etc.) $\square$

(3) *Behauptung:* $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

**Beweis:**

(1) Stimmt für $n = 1$, da $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

(2) Gelte die Behauptung für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\Rightarrow$ Behauptung gilt für $n + 1$

$\square$

**Definition 1.15.**

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &:= \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \mathbb{Z} &:= \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{ganze Zahlen} \\ \mathbb{Q} &:= \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{rationale Zahlen} \end{aligned}$$

**Satz 1.16.** Sind $x, y \in \mathbb{R}$ und $x < y$, so existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$.

**Beweis:** Wähle $q \in \mathbb{N}$, $q > \frac{1}{y-x}$, dann $qy - qx > 1$. Dann existiert (Beweis später) ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $qx < p < qy$, d.h. $x < \frac{p}{q} < y$.

*Nachweis der Existenz eines solchen* $p$*:*

Setze $M := \mathbb{Z} \cap (-\infty, qx]$ nach oben beschränkt.

$$s := \sup M$$

Wähle $n \in M$ mit $n > s - 1$. Setze $p := n + 1 \in \mathbb{Z}$; ferner $p > s$.

$\Rightarrow p \notin M$; wegen $p \in \mathbb{Z}$ also $p \notin (-\infty, qx]$, d.h. $p > qx$

Ferner $p = n + 1 \leq qx + 1 < qy$. $\square$

## 1.5. Einige Formeln (Notationen)

(1) Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$: $a^n := a \cdot a \cdots a$ ($n$ mal)

Präzise mit vollständiger Induktion:
Definiere $a^1 := a$
Sei $a^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits definiert.
Dann $a^{n+1} := a^n \cdot a$
Daraus: übliche Rechenregeln für Potenzen.

Falls $a \neq 0, n \in \mathbb{N} : a^{-n} := \frac{1}{a^n}$
Für alle $a \in \mathbb{R} : a^0 := 1$

Damit: $a^n$ (für $a \neq 0$) für alle $n \in \mathbb{Z}$ definiert.

(2) Für $n \in \mathbb{N} : n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$
Präzise: $0! := 1$; falls $n!$ bereits definiert für ein $n \in \mathbb{N}_0$: $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$

Damit ist $n!$ definiert für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(3) Für $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$:
$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (Binomialkoeffizenten)
Es gilt: $\binom{n}{0} = 1; \binom{n}{n} = 1$
Ferner: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, 1 \leq k \leq n$

(4) Bernoulli*sche Ungleichung:*
Für $x \in \mathbb{R}, x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\boxed{(1+x)^n \;\geq\; 1+nx}$$

**Beweis:** $n = 1 : (1+x)^1 \;=\; 1+x \;=\; 1+1x$
Gelte die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$;

$$(1+x)^{n+1} \;=\; (1+x)^n \cdot (1+x) \;\geq\; (1+nx)(1+x) \;=\; 1+(n+1)x+nx^2 \;\geq\; 1+(n+1)x$$

$\square$

(5) Summenzeichen, Produktzeichen:
Will definieren:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

Präzise: Setze $a_1 \in \mathbb{R}$, so setze

$$\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1$$

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1$$

Sind für je $n$ Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ bereits obige Ausdrücke definiert und sind $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$, so setze

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left( \sum_{k=1}^{n} a_k \right) + a_{n+1}$$

Produktzeichen analog

Sind $p, q \in \mathbb{Z}, p \leq q, a_p, \ldots, a_q \in \mathbb{R}$, so definiere

$$\sum_{k=p}^{q} a_k := \sum_{k=1}^{q-p+1} a_{p-1+k}$$

$$\prod_{k=p}^{q} a_k := \prod_{k=1}^{q-p+1} a_{p-1+k}$$

Schließlich für $p > q$:

$$\sum_{k=p}^{q} a_k := 0, \qquad \prod_{k=p}^{q} a_k := 1$$

(6) *Binomischer Lehrsatz:*

Es seien $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

(7) Es seien $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$$

## 1.6. Wurzeln

Will nun $\sqrt[n]{\phantom{a}}$ einführen.

**Lemma 1.17.** Für $x, y \in \mathbb{R},\ x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x \leq y \ \Leftrightarrow\ x^n \leq y^n$$

**Satz und Definition 1.18.** Es sei $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

*Behauptung:* Es existiert genau ein $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ mit $x^n = a$. Dieses $x$ heißt *$n$-te Wurzel* aus $a$, $x =: \sqrt[n]{a}$.

Speziell für $n = 2:\ \sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$

**Beweis:** Eindeutigkeit nach obigem Lemma. Die Existenz: mit Zwischenwertsatz für stetige Funktionen 7.11. □

**Bemerkung 1.19.**

- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

  **Beweis:** *Annahme:* $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, d.h. es gibt $p, q \in \mathbb{N},\ p, q$ teilerfremd, mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$; dann $2 = \frac{p^2}{q^2}$, also

  $$p^2 = 2q^2$$

  $\Rightarrow p^2$ ist durch 2 teilbar.
  $\Rightarrow p$ ist durch 2 teilbar.
  $\Rightarrow p^2$ ist durch 4 teilbar.
  $\Rightarrow q^2$ ist durch 2 teilbar.
  $\Rightarrow q$ ist durch 2 teilbar.
  $\Rightarrow p, q$ beide durch 2 teilbar; $\Rightarrow$ Widerspruch zu „$p, q$ teilerfremd“ □

- Nach unserer Definition ist $\sqrt[n]{a} \geq 0$ (für $a \geq 0$)

- **Achtung:** Wir ziehen nur Wurzeln aus Zahlen $\geq 0$

  Bsp: $\sqrt{4} = 2$; die Gleichung $x^2 = 4$ hat **zwei** Lösungen 2 und $-2$; als **Wurzel** wählen wir die Lösung $\geq 0$ aus.

- $\sqrt{a^2} = |a|$

## 1.7. Potenzen mit rationalen Exponenten

Es sei $a \geq 0$ und $r \in \mathbb{Q}, r > 0$. Also $r = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$

Wir *wollen* definieren:

$$a^r := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Problem: Ist $r = \frac{p}{q}$ eine weitere Darstellung von $r$, gilt dann

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p \quad ?$$

Ja! Denn: Setze

$$x := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, y := \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Dann

$$x^q = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^q = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mq} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{np} = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^p = a^p$$

Analog für $y^q$.

d.h. $x^q = y^q$. Nach Hilfssatz also $x = y$

Also obige Definition in Ordnung.

Es gelten die bekannten Rechenregeln.

Ist $a > 0, r \in \mathbb{Q}, r < 0$, so setze $a^r := \frac{1}{a^{-r}}$.

# 2. Folgen, Konvergenz

## 2.1. Definition der Folgen

**Definition 2.1.** Sei $X$ eine beliebige Menge, $X \neq \emptyset$.

Eine Funktion $a : \mathbb{N} \to X$ heißt *Folge in X*.

Schreibweise:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n := a(n) \quad n$-tes Folgenglied

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $(a_n)$ oder $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ statt $a$

Ist $X = \mathbb{R}$, so spricht man von *reellen Folgen*.

**Bemerkung 2.2.** Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $a : \{p, p+1, p+2, \ldots\} \longrightarrow X$ eine Funktion, so spricht man ebenfalls von einer Folge in $X$.

Bezeichnung: $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ oder $(a_p, a_{p+1}, \ldots)$

**Beispiel 2.3.**

- $a_n := \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also
  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\big)$
- $\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_{2n} := 0, a_{2n-1} := 1$
  also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 1, 0, \ldots)$
- $\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n := (-1)^n$
  also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$

**Definition 2.4.** Sei $X$ eine beliebige Menge, $X \neq \emptyset$.

(1) $X$ ist *endlich*, wenn eine surjektive Abbildung $\phi : \{1, \ldots, n\} \to X$ existiert.

(2) $X$ heißt *abzählbar*, wenn $X$ endlich ist *oder* eine surjektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to X$ existiert. (D.h. wenn $X$ endlich ist oder eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X$ existiert mit $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} = X$.

oder: die Elemente von $X$ können mit $\{1, \ldots, n\}$ oder mit $\mathbb{N}$ *durchnummeriert* werden.)

(3) $X$ heißt *überabzählbar*, wenn $X$ nicht abzählbar ist.

**Beispiel 2.5.**

- $\mathbb{N}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{N} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n := n$
- $\mathbb{Z}$ ist abzählbar.

  Definiere etwa: $a_1 := 0, a_2 := 1, a_3 := -1, a_4 := 2, \ldots$

- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

  $\Rightarrow$ Unendliches Rechteck

  $$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

  Dann setze $b_1 := 0,\ b_2 := a_1,\ b_3 := -a_1,\ \dots$, um auch die negativen Zahlen durchnummerieren zu können.

- $\mathbb{R}$ ist *überabzählbar*. ($\Rightarrow$ es gibt auch viel mehr irrationale Zahlen als rationale)

Ab jetzt seien alle Folgen *reelle* Folgen.

**Definition 2.6.** Sei $(a_n)$ eine reelle Folge. $(a_n)$ heißt *nach oben bzw. unten beschränkt*, wenn die Menge $M = \{a_1, a_2, a_3 \dots\}$ nach oben bzw. nach unten beschränkt ist. In diesem Fall: $\sup(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \sup M$. Analog für die andere Seite.

$(a_n)$ heißt *beschränkt*, wenn $(a_n)$ nach oben und nach unten beschränkt ist.

## 2.2. Konvergenz

Der Begriff der *Konvergenz* ist der zentrale Begriff der Analysis. Wir betrachten zunächst die Konvergenz reeller Folgen.

Sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Was soll „$a_n \to a$ für $n \to \infty$" bedeuten?

1. Schritt: „Die Folgenglieder $a_n$ kommen $a$ beliebig nahe oder $|a_n - a|$ wird beliebig klein, wenn $n$ groß wird."

2. Schritt: So sollte doch zum Beispiel gelten:

$$|a_n - a| < \frac{1}{1000}$$

Nur: für welche $n$?

Idee: Ab einem gewissen Index $n_0$ soll für alle $n \geq n_0$ die obige Ungleichung gelten.

Ebenso sollte es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ geben mit $|a_n - a| < 10^{-6}$ für alle $n \geq n_1$.

3. Schritt: Ist $\varepsilon > 0$ (und $\varepsilon$ beliebig klein), so sollte es stets ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ geben, mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

Diese Überlegungen führen uns zu folgender

**Definition 2.7.**

(1) Die Folge $(a_n)$ heißt *konvergent gegen $a$*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

In diesem Fall heißt $a$ *Grenzwert (Limes)* von $(a_n)$.

Bezeichnung: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ oder: $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

(2) Eine Folge $(a_n)$ heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass $(a_n)$ gegen $a$ konvergiert.

(3) Eine Folge $(a_n)$ heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergent ist.

**Definition 2.8.** Für $x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ definiere:

$$U_\varepsilon(x_0) := \big\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\big\} = (x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon)$$

als $\varepsilon$-*Umgebung von* $x_0$.

Somit gilt für eine Folge $(a_n)$ und $a \in \mathbb{R}$:

$a_n \to a$ für $n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad a_n \in U_\varepsilon(a)$

**Satz 2.9.** $(a_n)$ sei eine konvergente Folge. Dann gilt:

(1) Der Grenzwert von $(a_n)$ ist eindeutig bestimmt.

(2) $(a_n)$ ist beschränkt.

**Beweis:**

(1) *Annahme:* $a_n \to a$ und $a_n \to b$, $a \neq b$ Wähle $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$.

Dann wegen $a_n \to a : a_n \in U_\varepsilon(a)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.
d.h. $a_n \notin U_\varepsilon(a)$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$.
Insbesondere $a_n \in\ U_\varepsilon(b)$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$. ↯

(2) Nach Definition gilt insbesondere für $\varepsilon := 1$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < 1$$

Daher gilt:

$$\forall n \geq n_0 \quad |a_n| \;=\; \big|(a_n - a) + a\big| \;\leq\; |a_n - a| + |a| \;<\; 1 + |a|$$

Setze jetzt $c := \max\big\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |a| + 1\big\}$

Dann offenbar $\forall n \in \mathbb{N}\ \ |a_n| \leq c$.

□

**Beispiel 2.10.**

- Sei $c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n := c$. Dann heißt $(a_n)$ *konstante* Folge.

  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n - c| = 0$$

  Daher natürlich $a_n \to c$ für $n \to \infty$.

- $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n := \frac{1}{n}$.

  *Behauptung:* $(a_n) \to 0$.

**Beweis:** Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig). Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Also

$$\forall n \geq n_0 \quad |a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

$\square$

- $\forall a \in \mathbb{N} \;\; a_n := n$

  $(a_n)$ ist nicht konvergent, da sie nicht beschränkt ist. (vgl. obiger Satz)

- $\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n := (-1)^n$

  *Behauptung:* $(a_n)$ ist divergent.

  **Beweis:** *Annahme:* $(a_n)$ ist konvergent, also exisitert $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$. Dann gilt: $a \neq 1$ oder $a \neq -1$. Etwa $a \neq 1$:

  Wähle $\varepsilon > 0$ mit $1 \notin U_\varepsilon(a)$. Dann wegen $a_n \to a$:

  $a_n \in U_\varepsilon(a)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

  $\Rightarrow \quad a_n \notin U_\varepsilon(a)$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$

  Insbesondere: $a_n = 1$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ $\lightning$ $\square$

- $\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

  Dann

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

  *Behauptung:* $a_n \to 0$

  Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

  Dann $\frac{1}{n_0} < \varepsilon^2$, also $\frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$

  Daher $\forall n \geq n_0 \;\; |a_n - 0| = a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$.

- $\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n := \frac{n^2}{n^2+1}$

  Dann:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n - 1| = \left| \frac{n^2}{n^2+1} - \frac{n^2+1}{n^2+1} \right| = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$$

  Sei $\varepsilon > 0$; wie oben: wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ etc. (vgl. oben)

- $\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$

  *Behauptung:* $a_n \to 0$

**Beweis:**

Idee: $|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Für jedes $n \geq n_0$ gilt dann $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$, also $|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. $\square$

- Sei $x \in \mathbb{R}$.

  Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ finden wir ein $r_n \in \mathbb{Q}$ mit $r_n \in \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$, d.h. mit $|x - r_n| < \frac{1}{n}$.

  Wir erhalten $r_n \to x$ für $n \to \infty$.

  Fazit: Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen.

**Bemerkung 2.11.** Sei $p \in \mathbb{Z}$ fest. Für Folgen der Form $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ definieren wir Konvergenz, Beschränktheit, ... analog zu Folgen der Form $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Im folgenden formulieren wir Definitionen, Sätze etc. nur für Folgen der Form $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sie gelten sinngemäß für Folgen der Form $(a_n)_{n=p}^{\infty}$.

**Satz 2.12.** $(a_n), (b_n), (c_n)$ seien Folgen in $\mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$

(1) $a_n \to a \;\Leftrightarrow\; |a_n - a| \to 0$

(2) Ist $(\alpha_n)$ eine weitere Folge mit $\alpha_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $|a_n - a| \leq \alpha_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $a_n \to a$ für $n \to \infty$

(3) Gilt $a_n \to a$, so gilt $|a_n| \to |a|$

(Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.)

(4) Es gelte $a_n \to a$, $b_n \to b$. Dann gilt:

(i) $a_n + b_n \to a + b$

(ii) $\alpha \cdot a_n \to \alpha \cdot a$ (wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig)

(iii) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

(iv) Sei $b \neq 0$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m \quad b_n \neq 0$ und die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=m}^{\infty}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$.

(5) Gilt $a_n \to a$ und $b_n \to b$ und gilt $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $a \leq b$.

(6) Gilt $a_n \to a$ und $c_n \to a$ und $a_n \leq b_n \leq c_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $b_n \to a$.

**Beweis:**

zu (1): Ergibt sich aus der Definition des Konvergenzbegriffes.

zu (2): Sei $\varepsilon > 0$. Da $\alpha_n \to 0$, existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_1 \quad |\alpha_n| < \varepsilon$

Ferner existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_2 \quad |a_n - a| \leq \alpha_n$

Wähle $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$

Dann $\forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| \leq \alpha_n = |\alpha_n| < \varepsilon$

Also $a_n \to a$

zu (3): $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| =: \alpha_n$

Wegen $a_n \to a$ folgt aus (1): $\alpha_n \to 0$

Nach (2) also $|a_n| \to |a|$

zu (4): zu (i) Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $a_n \to a$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_1 \;\; |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Wegen $b_n \to b$ existiert $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_2 \;\; |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Wähle $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ Dann:

$$\forall n \geq n_0 \quad \big|(a_n + b_n) - (a + b)\big| \; = \; \big|(a_n - a) + (b_n - b)\big| \; \leq \; |a_n - a| + |b_n - b| \; < \; \varepsilon$$

zu (ii) Beweis selbst

zu (iii)

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n b_n - ab| &= \big|(a_n b_n - a_n b) + (a_n b - ab)\big| \; \leq \; |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \end{aligned}$$

Außerdem ist $(a_n)$ beschränkt, da konvergent. Also $\exists c \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \;\; |a_n| \leq c$.

Daher

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n b_n - ab| \leq c|b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| =: \alpha_n$$

Aus (ii) und (1) folgt

$$c|b_n - b| \to 0 \text{ und } |b| \cdot |a_n - a| \to 0$$

Nach (i) also $\alpha_n \to 0$. Nach (2) also $a_n b_n \to ab$

zu (iv) Wegen $b \neq 0$ gilt $\varepsilon := \frac{|b|}{2} > 0$.

Wegen $b_n \to b$ gilt $|b_n| \to |b|$, daher existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq m \;\; \big||b_n| - |b|\big| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq m \;\; |b_n| > |b| - \varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$

Ferner $\forall n \geq m$ ist $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| =: \alpha_n$

Dann $\alpha_n \to 0$, da $b_n \to b$ (ii)

Nach (2) also $\left(\frac{1}{b_n}\right) \to \left(\frac{1}{b}\right)$

Nach (iii): $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a.\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

zu (5): *Annahme:* $a > b$

Setze $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$. Offenbar gilt

$$\forall x \in U_\varepsilon(b) \; \forall y \in U_\varepsilon(a) : \quad x < y \tag{2-i}$$

Wegen $a_n \to a$ und $b_n \to b$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; n \geq n_0 : \quad a_n \in U_\varepsilon(a) \; \wedge \; b_n \in U_\varepsilon(b)$$

Wegen (2-i) gilt also

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; n \geq n_0 : \quad b_n < a_n \quad ↯$$

zu (6): Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon \; \wedge \; |c_n - a| < \varepsilon \; \wedge \; a_n \leq b_n \leq c_n$$

$$\Rightarrow \quad a_n > a - \varepsilon \quad \wedge \quad c_n < a + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \geq n_0 \quad a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

Das heißt: $\forall n \geq n_0 \;\; -\varepsilon < b_n - a < \varepsilon$

also $\forall n \geq n_0 \;\; |b_n - a| < \varepsilon$. Daher $b_n \to a$.

□

**Beispiel 2.13.**

(1) Sei $p \in \mathbb{N}$ und $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n := \frac{1}{n^p}$

*Behauptung:* $a_n \to 0$

**Beweis:**

1. Möglichkeit: Setze $b_n := \frac{1}{n}$, dann $0 \leq a_n \leq b_n$ wegen $n^p \geq n$.

Daher $a_n \to 0$

2. Möglichkeit: Setze $c_n := \frac{1}{n} \to 0$. Mit vollständiger Induktion über $p$ folgt mit (4) (iii): $a_n \to 0$

□

(2)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n := \frac{5n^2+3n+6}{7n^2+4n+1} = \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{6}{n^2}}{7+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{5}{7}$$

## 2.3. Monotonie

**Definition 2.14.** Die Folge $(a_n)$ heißt $\left| \begin{array}{c} \textit{monoton wachsend} \\ \textit{monoton fallend} \end{array} \right|$, wenn

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_{n+1} \text{ bzw. } a_n \geq a_{n+1}$$

Die Folge $(a_n)$ heißt $\left| \begin{array}{c} \textit{streng monoton wachsend} \\ \textit{streng monoton fallend} \end{array} \right|$, wenn obiges mit strengem $\left| \begin{array}{c} < \\ > \end{array} \right|$ gilt.

**Satz 2.15** (Monotonie-Kriterium)**.** Ist $(a_n)$ monoton $\left| \begin{array}{c} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right|$ und nach $\left| \begin{array}{c} \text{oben} \\ \text{unten} \end{array} \right|$ beschränkt, dann ist $(a_n)$ konvergent.

**Beweis:** Setze $a := \sup a_n$. Dies existiert, da $(a_n)$ nach oben beschränkt ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von $(a_n)$.

Das heißt: $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ a_{n_0} > a - \varepsilon$

Somit $\forall n \geq n_0\ \ a_n \geq a_{n_0} > a - \varepsilon$ (wegen Monotonie)

$a_n \leq a < a + \varepsilon$ (wegen Supremum)

Also $\forall n \geq n_0\ \ |a_n - a| < \varepsilon$

2. Teil geht analog.

Eine anschauliche Darstellung des Beweises findet man in Abbildung 2.1. □

**Beispiel 2.16.** Definiere $(a_n)$ *rekursiv*:

$$a_1 := \sqrt[3]{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} := \sqrt[3]{6 + a_n}$$

*Behauptung:* $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n < 2$.

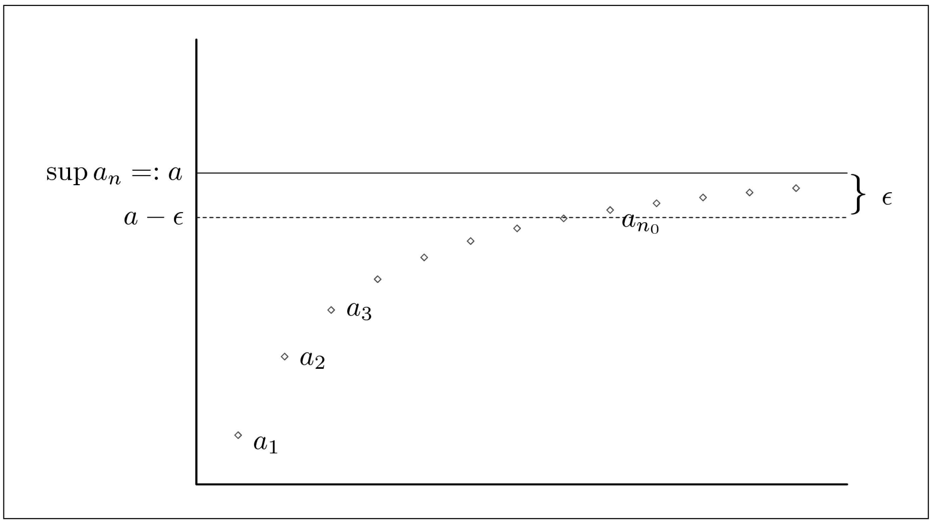



Abbildung 2.1.: Zum Beweis des Monotonie-Kriteriums

**Beweis:** $a_1 = \sqrt[3]{6} < 2$

Gelte $a_n < 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Dann $a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} < \sqrt[3]{6+2} = 2$ (wegen $a_n < 2$).

*Behauptung:* $(a_n)$ monoton wachsend.

*Beweis:* $a_1 \leq a_2$. Gelte $a_n \leq a_{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

$$a_{n+2} = \sqrt[3]{6 + a_{n+1}} \geq \sqrt[3]{6 + a_n} = a_{n+1}$$

Also $(a_n)$ konvergent. □

**Beispiel 2.17.** Sei $p \in \mathbb{N}$ fest, $(a_n)$ eine Folge, $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Ferner gelte $\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n \geq 0$. Also gilt auch: $a \geq 0$. (s.o.)

Behauptung: $\sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$.

**Beweis:**

1. Fall: $a = 0$

Zu zeigen: $\sqrt[p]{a_n} \to 0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0 \;\; a_n < \varepsilon^p$. (geht wegen $a_n \to 0, \forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n \geq 0$)

$$\Rightarrow \quad \forall n \geq n_0 \quad \sqrt[p]{a_n - 0} = \sqrt[p]{a_n} < \varepsilon$$

2. Fall: $a > 0$

$\forall n \in \mathbb{N} \;\; |a_n - a| = \left|\left(\sqrt[p]{a_n}\right)^p - \left(\sqrt[p]{a}\right)^p\right|$

Nach Verallgemeinerung der 3. binom. Formel:

$$= \left|\left(\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}\right) \cdot \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-1-k} \left(\sqrt[p]{a}\right)^k\right|$$

$$\geq \left|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}\right| \cdot \underbrace{\left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-1-(p-1)} \cdot \left(\sqrt[p]{a}\right)^{p-1}}_{=\left(\sqrt[p]{a}\right)^{p-1}=:c}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad \left|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}\right| \leq \tfrac{1}{c}\left|a_n - a\right|$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$$

□

**Beispiel 2.18.** Sei $x \in \mathbb{R}$ fest und $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n := x^n$. Dann gilt:

1. Fall: $x = 0 \ \Rightarrow \ a_n \to 0$

2. Fall: $x = 1 \ \Rightarrow \ a_n \to 1$

3. Fall: $x = -1 \ \Rightarrow \ (a_n) = \left((-1)^n\right)$ divergent.

4. Fall: $|x| > 1 \ \Rightarrow \ \delta := |x| - 1 > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n| = |x^n| = |x|^n = (1+\delta)^n \overset{\substack{\text{Bernoullische}\\ \text{Ungleichung}}}{\geq} 1 + n \cdot \delta > n \cdot \delta$$

Weil $\delta > 0 \ \Rightarrow \ (a_n)$ nicht beschränkt $\Rightarrow \ (a_n)$ divergent.

5. Fall: $0 < |x| < 1 \ \Rightarrow \ y := \frac{1}{|x|} - 1 > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{|a_n|} = \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = (1+y)^n \overset{\substack{\text{Bernoullische}\\ \text{Ungleichung}}}{\geq} 1 + n \cdot y > n \cdot y$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n| < \tfrac{1}{y} \cdot \tfrac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0$$

**Beispiel 2.19.** Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\forall n \in \mathbb{N}\ \ s_n := \sum_{k=0}^{n} x^k$.

*Behauptung:* $(s_n)$ konvergiert $\Leftrightarrow \ |x| < 1$; dann: $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$.

**Beweis:**

1. Fall: $x = 1 \ \Rightarrow \ s_n = n + 1 \ \Rightarrow \ (s_n)$ divergiert.

2. Fall: $x \neq 1$

Mit vollständiger Induktion zeigt man: $s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \quad \left[(s_n) \text{ konvergiert} \ \Leftrightarrow \ \left(x^{n+1}\right) \text{ konvergiert}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[(s_n) \text{ konvergiert} \ \Leftrightarrow \ |x| < 1\right]$$

außerdem: $|x| < 1 \ \Rightarrow \ x^{n+1} \to 0 \ \Rightarrow \ s_n \to \frac{1}{1-x}$

□

**Beispiel 2.20.** *Behauptung:* $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$.

**Beweis:** Es gilt: $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \sqrt[n]{n} \geq 1$ (da $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1}$).

Sei $\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Zu zeigen: $a_n \to 0$

Es gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot a_n^k \geq \binom{n}{2} \cdot a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot a_n^2$$

$$\Rightarrow \;\; \forall n \geq 2 \quad a_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \forall n \geq 2 \quad 0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

$$\Rightarrow \;\; a_n \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

$\square$

**Beispiel 2.21.** Sei $c > 0$ fest. *Behauptung:* $\sqrt[n]{c} \to 1$ für $n \to \infty$

**Beweis:**

1. Fall: $c \geq 1$:

$$\exists m \in \mathbb{N} \quad c \leq m \;\; \text{also} \;\; \forall n \geq m \;\; 1 \leq c \leq n$$

$$\Rightarrow \;\; \forall n \geq m \quad 1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}$$

Also $\sqrt[n]{c} \to 1$. (s.o.)

2. Fall: $0 < c < 1$:

Dann $\frac{1}{c} > 1 \;\; \Rightarrow \;\; \sqrt[n]{\frac{1}{c}} \to 1$

Durch invertieren folgt: $\sqrt[n]{c} \to 1$

$\square$

**Beispiel 2.22.** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $b_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

*Behauptung:* $(a_n)$ und $(b_n)$ konvergieren und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

**Beweis:**

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{\substack{\text{Bernoullische} \\ \text{Ungleichung}}}{\geq} 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$$

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = b_n$$

Also: $(b_n)$ ist streng monoton wachsend.

(iii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$b_n = 1 + \underbrace{1}_{=\frac{1}{2^0}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2^1}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3}}_{\leq \frac{1}{2^2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdots n}}_{\leq \frac{1}{2^{n-1}}} \; < \; 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq 2 \cdot 1 = 2$$

Also: $b_n \leq 1 + 2 = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Nach dem Monotonie-Kriterium konvergiert $b_n$ wegen (ii) und (iii).

Setze $b := \lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

(v) Wir zeigen mit der Bernoullischen Ungleichung, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} > a_n$.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} > a_n \quad &\Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{(n+2) \cdot n}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+1}{n+2} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+1}{n+2} \\
&\Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n+2}}_{\text{bleibt zu zeigen}}
\end{aligned}$$

Nach der Bernoullischen Ungleichung:

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(1+n)^2}$$

Bleibt noch zu zeigen:

$$1 - \frac{n}{(1+n)^2} > 1 - \frac{1}{n+2}$$

d.h.

$$\frac{n}{(1+n)^2} < \frac{1}{n+2} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)^2 > n \cdot (n+2) \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + 2 \cdot n + 1 > n^2 + 2 \cdot n$$

Dies ist aber wahr.

(vi) Wir wollen zeigen: Für alle $n \geq 2$ gilt: $a_n < b_n$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n}{n}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1} \cdots \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{<1} < b_n
\end{aligned}$$

(vii) Aus (vi) folgt: $a_n < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nach dem Monotoniekriterium konvergiert dann $(a_n)$; sezte: $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Wegen (vi) folgt: $a \leq b$.

(viii) Sei $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$ fest. Für $n \geq j$ gilt:

$$a_n \overset{\text{s.o.}}{\geq} \underbrace{1 + 1 + \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\to 1 \ (n\to\infty)}}_{\to b_j} =: c_n$$

Also:

$$a_n \geq c_n,\ c_n \to b_j \quad \Rightarrow \quad a \geq b_j$$

$j$ beliebig und $b_j \to b \quad \Rightarrow \quad a \geq b \overset{\text{(vii)}}{\Rightarrow} \quad a = b$.

$\square$

**Definition 2.23.** $e := \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ heißt Eulersche Zahl.

Nach vorigem Beispiel gilt:

$$2 \leq e \leq 3 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$$

## 2.4. Häufungswert

**Definition 2.24.** Sei $(a_n)$ eine reelle Folge und $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$

Setze $\forall k \in \mathbb{N}\ \ b_k := a_{n_k}$

Die Folge $(b_k)$ heißt dann *Teilfolge* von $(a_n)$.

**Beispiel 2.25.**

(1) $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ ist Teilfolge von $(a_n)$

(Setze $n_k := 2k$)

(2) $(a_1, a_4, a_9, a_{16} \ldots)$ ist Teilfolge von $(a_n)$

(Setze $n_k := k^2$)

(3) $(a_4, a_2, a_8, a_6, a_{10}, \ldots)$ ist keine Teilfolge von $(a_n)$.

Denn: $n_k := \begin{cases} 2 \cdot (k-1) & \text{für } k \text{ gerade} \\ 2 \cdot (k+1) & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$ ist nicht streng monoton wachsend.

**Definition 2.26.** Sei $(a_n)$ eine reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$.

$a$ heißt *Häufungswert* von $(a_n)$, wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})$ von $(a_n)$ existiert mit $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$.

$\mathrm{HW}(a_n) := \{a \in \mathbb{R} : a \text{ ist Häufungswert von } (a_n)\}$

**Beispiel 2.27.**

(1) $\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n := (-1)^n$

$\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_{2n} = 1 \to 1$

$(a_{2n}) = (a_{n_k})$ mit $n_k := 2k$ ist Teilfolge von $(a_n)$.

$\Rightarrow$ 1 ist Häufungswert von $(a_n)$

$\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_{2n-1} = -1 \to -1$

$(a_{2n-1}) = (a_{n_k})$ mit $n_k := 2k - 1$ ist Teilfolge von $(a_n)$.

$\Rightarrow$ $-1$ ist Häufungswert von $(a_n)$

*Behauptung:* Es gibt keinen weiteren Häufungswert von $(a_n)$.

**Beweis:** Sei $a \in \mathbb{R}, a \neq 1, a \neq -1$. *Annahme:* $a$ ist Häufungswert.

Also existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})$ mit $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$.

Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $1 \notin U_\varepsilon(a), -1 \notin U_\varepsilon(a)$

Wegen $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall k \geq k_0 \;\; a_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$

Aber: $\forall k \in \mathbb{N} \;\; a_{n_k} = 1$ oder $a_{n_k} = -1$ ↯ □

(2) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Also existiert eine Folge $(a_n)$ in $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \ldots\}$

*Behauptung:* Jede reelle Zahl ist Häufungswert von $(a_n)$.

**Beweis:** Sei $a \in \mathbb{R}$. Es existiert ein $q_1 \in \mathbb{Q}$ mit $a < q_1 < a + 1$ (sogar unendlich viele).

Es existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $q_1 = a_{n_1}$.

Es existiert ein $q_2 \in \mathbb{Q}$ mit $a < q_2 < \min\left\{a + \frac{1}{2}, a_{n_1}\right\}$.

Es existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $q_2 = a_{n_2}$ und $n_2 > n_1$.

Es existiert ein $q_3 \in \mathbb{Q}$ mit $a < q_3 < \min\left\{a + \frac{1}{3}, a_{n_2}\right\}$.

Es existiert ein $n_3 \in \mathbb{N}$ mit $q_3 = a_{n_3}$ und $n_3 > n_2$.

Induktiv fortsetzen: Es existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})$ mit $a < a_{n_k} < \min\left\{a + \frac{1}{k}, a_{n_{k+1}}\right\}$ für alle $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$

Also $(a_{n_k}) \to a$ für $k \to \infty$

$\Rightarrow$ $a$ ist Häufungswert. □

(3) $\forall n \in \mathbb{N} \; a_n := n$

Für jede Teilfolge $(a_{n_k})$ gilt:

$(a_{n_k}) = (n_1, n_2, n_3, \ldots)$ unbeschränkt

$\Rightarrow$ Jede Teilfolge ist divergent. $\Rightarrow$ Es existieren keine Häufungswerte.

*Erinnerung:* $a_n \to a \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; a_n \in U_\varepsilon(a)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

**Satz 2.28.** Sei $(a_n)$ Folge und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$a \in \mathrm{HW}(a_n) \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\; a_n \in U_\varepsilon(a)$$

für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

**Beweis:**

„$\Rightarrow$“ Wir finden eine Teilfolge $(a_{n_k})$ von $(a_n)$ mit $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a_{n_k} \in U_\varepsilon(\alpha) \text{ für alle } k \geq k_0$$

d.h.

$$a_n \in U_\varepsilon(\alpha) \text{ für alle } n \in \{n_{k_0}, n_{k_0+1}, \ldots\} =: M$$

$M$ ist unendlich.

„$\Leftarrow$“ Zu $\varepsilon = 1$ finden wir $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\alpha - 1 < a_{n_1} < \alpha + 1$.

Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ finden wir $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $\alpha - \frac{1}{2} < a_{n_2} < \alpha + \frac{1}{2}$.

$$\vdots$$

Wir erhalten eine Teilfolge $(a_{n_k})$ von $(a_n)$ mit

$$\left|a_{n_k} - \alpha\right| < \frac{1}{k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \in \mathrm{HW}(a_n).$$

□

**Satz 2.29.** Ist $(a_n)$ konvergente Folge und $(a_{n_k})$ eine Teilfolge von $(a_n)$, so ist auch $(a_{n_k})$ konvergent und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Insbesondere ist $\mathrm{HW}(a_n) = \left\{\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right\}$.

**Beweis:** Sei $a := \lim a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $a_n \to a$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0 \;\; |a_n - a| < \varepsilon$.

Da $n_1 < n_2 < \ldots$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_{k_0} \geq n_0$. Dann gilt $\forall k \geq k_0 : \quad n_k > n_{k_0} \geq n_0$

$\Rightarrow \;\; \forall k \geq k_0 \;\; |a_n - a| < \varepsilon$, also konvergiert $a_{n_k} \to a$. □

**Lemma 2.30.** Jede Folge $(a_n)$ hat eine monotone Teilfolge.

**Beweis:** $m \in \mathbb{N}$ heiße „niedrig“ $:\Leftrightarrow \forall n \geq m \;\; a_n \geq a_m$.

1. Fall Es gibt höchstens endlich viele (möglicherweise gar keine) niedrige Indizes.
Dann finden wir ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m, m+1, \ldots$ sind alle nicht niedrig.

Setze $n_1 := m$.

$n_1$ nicht niedrig $\Rightarrow$ es existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 > n_1$ und $a_{n_2} < a_{n_1}$.
$n_2$ nicht niedrig $\Rightarrow$ es existiert ein $n_3 \in \mathbb{N}$ mit $n_3 > n_2$ und $a_{n_3} < a_{n_2}$.

$\vdots$

Wir erhalten eine Teilfolge $(a_{n_k})$, die monoton fällt.

2. Fall Es gibt unendlich viele niedrige Indizes. $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Da für alle $k \in \mathbb{N}$ der Index $n_k$ niedrig ist, gilt $\forall n \geq n_k: \quad a_n \geq a_{n_k}. \quad \Rightarrow \quad (a_{n_k})$ monoton wachsend.

□

**Satz 2.31** (Satz von BOLZANO–WEIERSTRASS)**.** Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungswert.

**Beweis:** Nach obigem Lemma enthält $(a_n)$ eine monotone Teilfolge $(a_{n_k})$. Da $(a_n)$ beschränkt ist, ist auch $(a_{n_k})$ (nach oben und unten) beschränkt. Nach dem Monotonie-Kriterium ist $(a_{n_k})$ konvergent. Dann ist $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k})$ Häufungswert von $(a_n)$. □

**Satz 2.32.** $(a_n)$ sei beschränkt ($\Rightarrow \ \mathrm{HW}(a_n) \neq \emptyset$). Dann gilt:

(1) $\mathrm{HW}(a_n)$ ist beschränkt.

(2) $\sup \mathrm{HW}(a_n)$, $\inf \mathrm{HW}(a_n)$ sind selbst wieder Häufungswerte. Also existieren $\max \mathrm{HW}(a_n)$ und $\min \mathrm{HW}(a_n)$.

**Beweis:**

zu (1): Wir finden ein $c \geq 0$ mit $|a_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Für jede Teilfolge $(a_{n_k})$ gilt $|a_{n_k}| \leq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Für jedes $\alpha \in \mathrm{HW}(a_n)$ gilt $|\alpha| \leq c$.

zu (2): Sei $s := \sup \mathrm{HW}(a_n)$ und $\varepsilon > 0$. Wir finden $\alpha \in \mathrm{HW}(a_n)$ mit $s - \frac{\varepsilon}{2} < \alpha \leq s$.

$\Rightarrow$ $U_{\varepsilon/2}(\alpha) \subset U_\varepsilon(s)$.

In $U_{\varepsilon/2}(\alpha)$ liegen unendlich viele der Folgenglieder $a_n$.

$\Rightarrow$ in $U_\varepsilon(s)$ liegen unendlich viele $a_n$.

$\Rightarrow$ $s \in \mathrm{HW}(a_n)$.

□

**Definition 2.33.** $(a_n)$ sei beschränkte Folge.

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \max \mathrm{HW}(a_n)$ heißt *limes superior* oder *oberer Limes* von $(a_n)$.

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \min \mathrm{HW}(a_n)$ heißt *limes inferior* oder *unterer Limes* von $(a_n)$.

Klar: Wenn $(a_n)$ beschränkt ist, dann gilt:

$$\forall a \in \mathrm{HW}(a_n) \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Beachte: Aus obigem Satz folgt: Ist $(a_n)$ konvergent, dann gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

**Beispiel 2.34.** $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = (-1)^n$. Schon gezeigt: $\mathrm{HW}(a_n) = \{1, -1\}$. Also:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -1$$

**Beispiel 2.35.** $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$. $(a_{2n})$ ist Teilfolge von $(a_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = e$. Ferner

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n+1} = -\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

$(a_{2n+1})$ ist Teilfolge von $(a_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = -e$. Also (!) ist $\mathrm{HW}(a_n) = \{e, -e\}$. d.h.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = e, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -e.$$

**Satz 2.36.** $(a_n)$ sei beschränkt. Dann gilt:

$$\forall \alpha \geq 0 \quad \limsup_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \limsup_{n\to\infty} a_n$$

$$\forall \alpha \geq 0 \quad \liminf_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \liminf_{n\to\infty} a_n$$

$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$$

## 2.5. Cauchy-Kriterium

**Definition 2.37.** Eine Folge $(a_n)$ heißt eine Cauchy-*Folge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

**Satz 2.38** (Cauchy-Kriterium)**.** $(a_n)$ konvergent $\Leftrightarrow$ $(a_n)$ Cauchy-Folge.

**Beweis:**

„$\Rightarrow$“ Sei $\varepsilon > 0$. Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Da $(a_n)$ konvergent ist, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| = \left|(a_n - a) + (a - a_m)\right| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon$$

„$\Leftarrow$“ Zeige zunächst $(a_n)$ (vorgegebene Cauchy-Folge) ist beschränkt.

Zu $\varepsilon := 1$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < 1$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad |a_n| = \left|(a_n - a_{n_0}) + a_{n_0}\right| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| \leq 1 + |a_{n_0}|$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq \max\left\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a_{n_0}|\right\}$$

Nach Bolzano-Weierstrass hat $(a_n)$ also einen Häufungswert, d.h. es existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})$.

Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k}$. Zu zeigen: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Da $a_{n_k} \to a$ existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_{k_0} \geq n_0$

$$\forall k \geq k_0 \quad |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| = \left|(a_n - a_{n_{k_0}}) + (a_{n_{k_0}} - a)\right| \;\leq\; \left|a_n - a_{n_{k_0}}\right| + \left|a_{n_{k_0}} - a\right| \;<\; \varepsilon$$

□

**Beispiel 2.39.** $(a_n)$ rekursiv definiert durch:

$$a_0 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{1 + a_n}$$

Dann:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0,\; a_n < 1$$

(Beweis per Induktion)

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq \frac{1}{2}$$

Daher:

$$\begin{aligned}
\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad |a_{n+k} - a_n| &= \left|\frac{1}{1 + a_{n+k-1}} - \frac{1}{1 + a_{n-1}}\right| \\
&= \frac{|a_{n+k-1} - a_{n-1}|}{(1 + a_{n+k-1})(1 + a_{n-1})} \\
&\leq \frac{4}{9} \cdot |a_{n+k-1} - a_{n-1}| \;\leq\; \ldots \;\leq\; \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \left|a_{n+k-(n-1)} - a_{n-(n-1)}\right| \\
&\leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \big(|a_{k+1}| + |a_1|\big) \;\leq\; 2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n, k \in \mathbb{N} \quad |a_{n+k} - a_n| \;\leq\; 2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

$\Rightarrow$ $(a_n)$ ist CAUCHY-Folge: Sei $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n_0 - 1} < \varepsilon$.

Seien $n, m \geq n_0$. o.B.d.A. sei $m > n$. Setze $k := m - n$.

$$\Rightarrow \quad |a_m - a_n| \;=\; \left|a_{n+k} - a_n\right| \;\leq\; 2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \;\leq\; 2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n_0-1} \;<\; \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $(a_n)$ ist CAUCHY-Folge. $\Rightarrow$ $(a_n)$ ist konvergent.

Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Wegen $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ und $a_n \to a$ und $a_{n+1} \to a$ folgt:

$$a = \frac{1}{1 + a}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + a - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a \;=\; -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \;=\; -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Wegen $a_n \geq \frac{1}{2}$ (s.o.) gilt auch $a \geq \frac{1}{2}$. Also $+$.

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

# 3. Reihen

**Definition 3.1.** Sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Die Folge $(s_n)$ heißt *unendliche Reihe* und wird mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

bezeichnet.

$s_n$ heißt *$n$-te Teilsumme* oder *Partialsumme.*

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent $:\Leftrightarrow$ $(s_n)$ konvergent. Analog: divergent.

Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so heißt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ der *Reihenwert* oder *Reihensumme* und wird ebenfalls mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

Das Symbol $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ hat also im Konvergenzfall *zwei* Bedeutungen.

**Bemerkung 3.2.**

(1) Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ eine Folge, so definiert man entsprechend

$$\forall n \geq p \quad s_n := a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n = \sum_{k=p}^{n} a_k$$

Die kommenden Sätze und Definitionen werden nur für den Fall $p = 1$ formuliert, gelten aber entsprechend auch für andere $p \in \mathbb{Z}$.

Man schreibt für $p = 1$ auch oft $\sum a_k$ statt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, wenn keine Verwirrungen zu befürchten sind.

(2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_j = \cdots$$

**Beispiel 3.3.**

(1) *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Also $\forall n \in \mathbb{N}\;\; s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

Wie bereits gezeigt (2.19): $(s_n)$ konvergiert $\Leftrightarrow |x| < 1$. In diesem Fall:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$$

Also $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ ist konvergent $\Leftrightarrow |x| < 1$, und in diesem Fall:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, d.h. $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Also $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ist konvergent und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

(3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, also $\forall n \in \mathbb{N}$ $s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

Wie bereits gesehen: $s_n \to e$ für $n \to \infty$.

Also: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist konvergent, und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

(4) *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Also $\forall n \in \mathbb{N}$ $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad s_{2n} = s_n + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}}}_{n \text{ Summanden}} \geq s_n + n \cdot \frac{1}{2n} = s_n + \frac{1}{2}$$

Also ist $(s_n)$ keine Cauchy-Folge, denn sonst gibt es zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n, m \geq n_0 \quad |s_n - s_m| < \varepsilon$$

Wähle $n \geq n_0$ beliebig und $m := 2n$, denn $|s_{2n} - s_n| < \varepsilon = \frac{1}{2}$ $\lightning$

Nach Cauchy-Kriterium ist $(s_n)$ divergent, d.h. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent.

**Satz 3.4.**

(1) Monotoniekriterium: Es gelte $\forall k \in \mathbb{N}$ $a_k \geq 0$

Ferner sei $(s_n)$ nach oben beschränkt. Dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

(2) Cauchy-Kriterium für Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geq n_0 \; m > n \quad \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

(3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sei konvergent, dann ist für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ die folgende Reihe $\sum\limits_{k=\nu+1}^{\infty} a_k$ konvergent, und für $r_\nu := \sum\limits_{k=\nu+1}^{\infty} a_k$ gilt $\lim\limits_{\nu\to\infty} r_\nu = 0$.

(4) Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.
Achtung: Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. Beispiel: harmonische Reihe.

**Beweis:**

(1) Da $\forall k \in \mathbb{N} \; a_k \geq 0$ ist $(s_n)$ monoton wachsend. $(s_{n+1} = s_n + a_{n+1})$ Ferner $(s_n)$ nach oben beschränkt. Also nach dem Monotoniekriterium für Folgen gilt: $(s_n)$ ist konvergent.

(2) Für $m > n$ gilt $s_m - s_n = \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k$

$\Rightarrow$ Behauptung folgt aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen.

(3) Sei $\nu \in \mathbb{N}$ fest. Setze $\forall m \geq \nu + 1 \;\; \sigma_m := \sum\limits_{k=\nu+1}^{m} a_k$.

Dann $\forall m \geq \nu + 1 \quad s_m = a_1 + \cdots + a_\nu + a_{\nu+1} + \cdots + a_m = s_\nu + \sigma_m$.

Lasse hier $m \to \infty$ gehen. Und mit $s := \lim\limits_{m\to\infty} s_m$ gilt also $\sigma_m = s_m - s_\nu \; \to \; s - s_\nu$ für $m \to \infty$.

D.h. $\sum\limits_{k=\nu+1}^{\infty} a_k$ ist konvergent und $\sum\limits_{k=\nu+1}^{\infty} a_k = s - s_\nu$.

Also $\forall \nu \in \mathbb{N} \;\; r_\nu = s - s_\nu \to 0$ für $\nu \to \infty$.

(4)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_{n+1} - s_n = (a_1 + \cdots + a_{n+1}) - (a_1 + \cdots + a_n) = a_{n+1}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k =: s$. Daher $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n \to s - s = 0$ für $n \to \infty$. Also $a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

$\square$

**Beispiel 3.5.**

(1) $a_k := (-1)^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $a_k \not\to 0$ für $k \to \infty$. Also $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ divergent.

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent, obwohl $\frac{1}{k} \to 0$ für $k \to \infty$.

**Satz 3.6.** $\sum a_k, \sum b_k$ seien konvergent, und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert auch

$$\sum(\alpha a_k + \beta b_k)$$

und

$$\sum(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum a_k + \beta \sum b_k$$

**Beweis:** $\forall n \in \mathbb{N}\ s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k,\ \ \sigma_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Da $\sum a_k, \sum b_k$ konvergent: $(s_n), (\sigma_n)$ auch konvergent.

Und:

$$\underbrace{\alpha s_n + \beta\sigma_n}_{=\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha a_k+\beta b_k)} \to \alpha \underbrace{\lim_{n\to\infty} s_n}_{=\sum a_k} + \beta \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sigma_n}_{=\sum b_k}$$

$\square$

*Achtung:* Eine Gleichung der Form

$$\sum(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum a_k + \beta \sum b_k$$

macht nur Sinn (als Gleichung zwischen Grenzwerten), wenn $\sum a_k, \sum b_k$ konvergieren.

**Definition 3.7.** $\sum a_k$ heißt *absolut konvergent* $:\Leftrightarrow \sum |a_k|$ konvergent.

**Satz 3.8.** Ist $\sum a_k$ absolut konvergent, so ist $\sum a_k$ konvergent. (Die Umkehrung ist falsch).

**Beweis:**

$$\forall m > n \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| = |a_{n+1} + \dots + a_m| \le |a_{n+1}| + \dots + |a_m| = \sum_{k=1}^{m} |a_k|$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum |a_k|$ konvergent nach Voraussetzung, folgt Behauptung aus dem CAUCHY–Kriterium. $\square$

**Beispiel 3.9.** *alternierende harmonische Reihe:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Zeige: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ist konvergent. Aber offenbar: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ist nicht absolut konvergent, denn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ (ist divergent)}$$

Zur Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Setze $a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Dann

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n}$$

$\Rightarrow$ $(s_{2n})$ ist monoton wachsend. Analog zeige: $(s_{2n-1})$ ist monoton fallend:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1} = \ldots \leq s_{2n-1}$$

$$s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} = -\frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \quad s_{2n-1} = s_{2n} + \frac{1}{2n}$$

Induktiv folgt:

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_{2n-3} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1$$

Insbesondere ist $(s_{2n})$ nach oben beschränkt (z.B. durch $s_1$) und $(s_{2n-1})$ ist nach unten beschränkt (z.B. durch $s_2$).

$\Rightarrow$ Nach Monotoniekriterium sind beide konvergent.

Sei $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}, \quad \tilde{s} := \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1}$.

Offenbar $s \leq \tilde{s}$. Außerdem gilt (vgl. oben): $s = \tilde{s}$.

Daher konvergiert auch $(s_n)$ gegen $s$:

$$\varepsilon > 0, \quad s_{2n} \to s \Rightarrow s_{2n} \in U_\varepsilon(s) \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow s_n \in U_\varepsilon(s) \text{ für fast alle geraden } n \in \mathbb{N}$$

Analog für die ungeraden Indizes, $\Rightarrow s_n \in U_\varepsilon(s)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow s_n \to s$.

(später: $s = \log 2$)

**Satz 3.10** (Leibniz–Kriterium)**.** Sei $(b_n)$ eine Folge, $b_n \geq 0$, $(b_n)$ monoton fallend; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, und $a_n := (-1)^{n+1} b_n$.

Dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

**Beweis:** vgl. obiges Beispiel. □

**Beispiel 3.11.**

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{für } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2^{k-1}} & \text{für } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Dann ist $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b_n \to 0$, aber: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ divergiert (Behauptung).

**Beweis:** $a_n := (-1)^{n+1} b_n, \quad s_n := a_1 + \dots + a_n,\ n \in \mathbb{N}$
Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \big(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}\big) + \big(a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}\big) \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}_{=:\alpha_n} - \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}_{=:\beta_n} \end{aligned}$$

Es ist $\beta_n$ konvergent (geometrische Reihe): $\beta_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

*Annahme:* $(s_n)$ konvergiert $\Rightarrow$ $(s_{2n})$ konvergiert, da $\beta_n$ konvergiert $\Rightarrow$ $(\alpha_n) = (s_{2n} - \beta_n)$ konvergiert ↯.

Also: $(s_n)$ divergiert. □

**Satz 3.12.**

(1) **Majorantenkriterium:** Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen, mit $|a_n| \le b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

Dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(2) **Minorantenkriterium:** Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen, mit $0 \le b_n \le a_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

Dann ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

**Beweis:**

(1)

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge k_0 \quad |a_n| \le b_n$$

Seien $m > n \ge k_0$:

$$\tilde{\sigma}_{m,n} := \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \le \sum_{k=n+1}^{m} b_k =: \sigma_{m,n}$$

Sei $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \ge n_0, m > n \quad \sigma_{m,n} < \varepsilon$$

o.B.d.A. sei $n_0 \ge k_0$.

$$\Rightarrow\ \forall m > n \ge n_0 \quad \tilde{\sigma}_{m,n} (\le \sigma_{m,n}) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist konvergent. (Nach 2× Cauchy-Kriterium)

(2) *Annahme:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

$\Rightarrow$ $\sum b_n$ konvergent. $\Rightarrow$ Widerspruch.

□

**Beispiel 3.13.**

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, d.h. $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Dann

$$|a_n| = a_n = \frac{1}{\underbrace{(n+1)}_{\geq n}(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} =: b_n$$

Bekannt $\sum b_n$ konvergent.

$\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergent.

Also $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent. $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent. (Reihenwert: $\frac{\pi^2}{6}$).

(2) Sei $\alpha \in (0,1], \alpha \in \mathbb{Q}$.

Dann

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n^\alpha$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$$

Da $\sum \frac{1}{n}$ divergent, folgt nach dem Minorantenkriterium $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ divergent.

(3) Sei $\alpha \geq 2, \alpha \in \mathbb{Q}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 \leq n^\alpha$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$$

Da $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergent, folgt nach dem Majorantenkriterium: $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ist konvergent.

(4) Ohne Beweis: Sei $\alpha > 1, \alpha \in \mathbb{Q}$. Dann ist die Reihe $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergent.

*Bemerkung:* Die Einschränkung $\alpha \in \mathbb{Q}$ wird später verschwinden, wenn wir Potenzen mit reellen Exponenten eingeführt haben. (siehe 7.27)

**Satz 3.14** (Wurzelkriterium)**.** Sei $(a_n)$ Folge.

(1) Ist $\sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschränkt, dann ist die Reihe $\sum a_n$ divergent.

(2) Sei $\sqrt[n]{|a_n|}$ beschränkt und setze $\alpha := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

Ist $\alpha > 1$, so ist $\sum a_n$ divergent.

**Beweis:**

(1) $\sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschränkt. $\Rightarrow$ $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele $n$.

$\Rightarrow$ $|a_n| \geq 1 \Rightarrow a_n \not\to 0$ für $n \to \infty$.

$\Rightarrow$ $\sum a_n$ divergent.

(2) Sei $\alpha < 1$. Wähle $x \in \mathbb{R}, \alpha < x < 1$

*Behauptung:* $\sqrt[n]{|a_n|} < x$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

**Beweis:** *Annahme:* $\sqrt[n]{|a_n|} \geq x$ für unendlich viele $n$. Also existiert eine Teilfolge:

$$\left(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right) \text{ mit } b_k := \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq x \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

Da $(b_k)$ beschränkt ist, hat sie nach Bolzano-Weierstrass mindestens einen Häufungswert; nenne diesen $\beta$. Es sei $(b_{k_j})$ eine Teilfolge, die gegen $\beta$ konvergiert. $(b_{k_j})$ ist eine Teilfolge von $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$.

$\Rightarrow\ \beta \in \mathrm{HW}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$.

$\Rightarrow\ \beta \leq \alpha$ (wg. $\alpha$ größter Häufungswert). Andererseits $b_{k_j} \geq x$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow\ \beta \geq x$. Also $x \leq \beta \leq a < x \Rightarrow$ Widerspruch. □

Also $\sqrt[n]{|a_n|} < x$ für fast alle $n$.

$\Rightarrow\ |a_n| < x^n$

Wegen $|x| = x < 1$ ist $\sum x^n$ konvergent. Also folgt aus dem Majorantenkriterium:

$$\Rightarrow\ \sum a_n \text{ absolut konvergent}$$

Sei $\alpha > 1$. Setze $\forall n \in \mathbb{N}\ \ c_n := \sqrt[n]{|a_n|}$.

Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\alpha - \varepsilon > 1$. Dann gilt $c_n \in U_\varepsilon(x)$ für unendlich viele $n$, da $\alpha$ Häufungswert ist.

$\Rightarrow\ c_n > 1$ für unendlich viele $n$.

$\Rightarrow\ |a_n| > 1$ für unendlich viele $n$.

Wie in (1) folgt: $\sum a_n$ divergent.

□

Beachte: Ist die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ beschränkt und

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

so liefert obiges Kriterium keine Entscheidung über Konvergenz von $\sum a_n$.

**Beispiel 3.15.**

(1) $a_n := \frac{1}{n}$.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \text{ für } n \to \infty$$

$$\Rightarrow\ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

und $\sum a_n$ divergent (harmonische Reihe)

(2) $a_n := \frac{1}{n^2}$.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to 1 \text{ für } n \to \infty$$

$$\Rightarrow\ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

und $\sum a_n$ konvergent.

(3) Sei $x \in \mathbb{R}$.

$$a_n := \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n^2 x^n, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \underbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \cdot |x|}_{\xrightarrow{n\to\infty} |x|} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{HW}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = \left\{\tfrac{1}{2}, |x|\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \max\left\{\tfrac{1}{2}, |x|\right\}$$

also: falls $|x| < 1$, ist $\sum a_n$ absolut konvergent. Falls $|x| > 1$, ist $\sum a_n$ divergent.

Falls $|x| = 1$, so gilt $|a_n| = n^2$ für alle ungeraden $n$. $\Rightarrow$ $a_n \not\to 0$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ divergent.

(4) $a_n := \frac{n^2}{4^n + n^3}$.

$$\frac{n^2}{2 \cdot 4^n} = \frac{n^2}{4^n + 4^n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{4^n}, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{\sqrt[n]{2} \cdot 4}}_{\to \frac{1}{4}} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \underbrace{\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{4}}_{\to \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{1}{4} < 1$$

$$\Rightarrow \quad \sum a_n \text{ konvergiert.}$$

(5) $a_n := \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$.

Hier ist $\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

D.h. $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ ist Teilfolge von $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Wegen $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$ gilt somit $\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{1}{e} < 1$.

$\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergiert.

**Satz 3.16** (Quotientenkriterium)**.** Sei $(a_n)$ Folge mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

(1) Ist $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ beschränkt und

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

so ist die Reihe $\sum a_n$ absolut konvergent.

(2) Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle $n$, so ist $\sum a_n$ divergent.

(3) Ist $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, so ist $\sum a_n$ divergent.

**Beweis:**

(1) Sei $\alpha := \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

Wähle $x \in \mathbb{R}, \alpha < x < 1$. Wie im Beweis für Wurzelkriterium folgt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq x \text{ für fast alle } n$$

etwa für alle $n \geq n_1$.

$$\Rightarrow \quad |a_n| \leq |a_{n-1}| \cdot x \leq |a_{n-2}| \cdot x^2 \leq \cdots \leq |a_{n_1}| \cdot x^{n-n_1} = \overbrace{|a_{n_1}| \cdot \frac{1}{x^{n_1}}}^{=:c} \cdot x^n \quad \text{für } n \geq n_1$$

$$\Rightarrow \quad |a_n| \leq c \cdot x^n$$

Wegen $x < 1$ ist $\sum x^n$ konvergent.

$\Rightarrow \sum a_n$ absolut konvergent.

(2) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle $n$. $\Rightarrow$ $\big(|a_n|\big)$ ist mon. wachsend.

$$\Rightarrow \quad a_n \not\to 0$$

$\Rightarrow \sum a_n$ divergent.

(3) Sei

$$\beta := \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$$

Wähle $x \in \mathbb{R}, 1 < x < \beta$. Ähnlich wie im Beweis zum Wurzelkriterium erhält man: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > x$ für fast alle $n$.

□

**Korollar 3.17.**

(1) Falls $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert, so gilt

$\sum a_n$ ist absolut konvergent, falls $\alpha < 1$ und divergent, falls $\alpha > 1$.

(2) Falls $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert, so gilt:

$\sum a_n$ ist absolut konvergent, falls $\beta < 1$ und divergent, falls $\beta > 1$.

**Korollar 3.18.**

(1) Existiert $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ und ist $\beta = 1$, so liefert obiger Satz keine Entscheidung. (analog zum Wurzelkriterium)

$$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1$$

$\Rightarrow \sum a_n$ divergent.

$$a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$$

$\Rightarrow \sum a_n$ konvergent.

## 3.1. Exponentialfunktion

**Beispiel 3.19.** Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Untersuche die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Klar: Für $x = 0$ ist die Reihe absolut konvergent mit Reihenwert 1.

Sei $x \neq 0$. Setze $a_n := \frac{x^n}{n!}$. Dann

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = |x| \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Insbesondere ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Nach dem Quotientenkriterium folgt:

$\sum a_n = \sum \frac{x^n}{n!}$ absolut konvergent.

Also $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

Dies definiert eine Funktion $E := \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

(Exponentialfunktion).

Es gilt $E(0) = 1,\ E(1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Später zeigen wir: $\forall r \in \mathbb{Q}\ \ E(r) = e^r$. Später *definieren* wir

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad E(x) =: e^x$$

Weiteres zum Thema Reihenkonvergenz:

**Definition 3.20.** Es sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Setze

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n := a_{\varphi(n)}$$

Dann heißt $(b_n)$ eine *Umordnung* von $(a_n)$. Selbiges gilt auch für die Reihe.

**Beispiel 3.21.** $(a_1, a_3, a_2, a_4, a_5, a_7, a_6, a_8, \ldots)$ ist eine Umordnung von $(a_n)$. (das ist etwas anderes als eine Teilfolge)

**Satz 3.22** (Umordnungssatz)**.** $(b_n)$ sei eine Umordnung von $(a_n)$.

(1) Ist $(a_n)$ konvergent, so ist auch $(b_n)$ konvergent, und

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

(2) Ist $\sum a_n$ *absolut* konvergent, so ist auch $\sum b_n$ absolut konvergent, und

$$\sum b_n = \sum a_n.$$

**Bemerkung 3.23.** Ist $\sum a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, so existiert zu jedem $b \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $(b_n)$ von $(a_n)$ mit

$$\sum b_n = b$$

**Definition 3.24** (CAUCHY-Produkt)**.** Gegeben seien Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$. Setze

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots$$

Dann heißt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ das CAUCHY-*Produkt* der Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

**Satz 3.25.** Sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ beide absolut konvergent, dann konvergiert auch ihr CAUCHY–Produkt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut, und

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

**Beispiel 3.26.** Sei $|x| < 1$. Bekannt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ absolut konvergent, und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Dann

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k \cdot x^{n-k} = (n+1)x^n$.

Also ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ absolut konvergent, und

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

**Bemerkung 3.27** (Weiteres zur Exponentialfunktion)**.**

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}$:

$$E(x) \cdot E(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n$$

$$\Rightarrow\ E(x)\cdot E(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=E(x+y)$$

Mit Induktion zeigt man:

$$\forall x_1,\dots,x_l\in\mathbb{R}\quad E(x_1+\cdots+x_l)=E(x_1)\cdot\dots\cdot E(x_l)$$

Weiterhin gilt für alle $x\in\mathbb{R}$:

$$1=E(0)=E\big(x+(-x)\big)=E(x)\cdot E(-x)$$

$$\Rightarrow\ E(x)\neq 0,\quad E(-x)=\frac{1}{E(x)}$$

Ferner:

$$E(x)=E\left(\tfrac{x}{2}+\tfrac{x}{2}\right)=\left(E\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)^2>0$$

Weiter für alle $n\in\mathbb{N}$:

$$E(n)=E(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ mal}})=E(1)\cdot E(1)\cdots E(1)=E(1)^n=e^n$$

Ferner:

$$e=E(1)=E\big(\underbrace{\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n}+\cdots+\tfrac{1}{n}}_{n\text{ mal}}\big)=\underbrace{E\left(\tfrac{1}{n}\right)\cdots E\left(\tfrac{1}{n}\right)}_{n\text{ mal}}=E\left(\tfrac{1}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow\ e^{\frac{1}{n}}=E\left(\tfrac{1}{n}\right)$$

Also für alle $r=\frac{n}{m}\in\mathbb{Q}$ mit $m,n\in\mathbb{N}$:

$$E\left(\tfrac{n}{m}\right)=E\big(\underbrace{\tfrac{1}{m}+\tfrac{1}{m}+\cdots+\tfrac{1}{m}}_{n\text{ mal}}\big)=\underbrace{E\big(\tfrac{1}{m}\big)\cdots E\big(\tfrac{1}{m}\big)}_{n\text{ mal}}=E\big(\tfrac{1}{m}\big)^n=\left(e^{\frac{1}{m}}\right)^n=e^{\frac{n}{m}}$$

Schließlich für alle $r\in\mathbb{Q}$:

Falls $r>0$

$$\Rightarrow\ E(r)=e^r$$

Falls $r<0$

$$\Rightarrow\ -r>0\quad\Rightarrow\quad E(-r)=e^{-r}=\frac{1}{e^r}$$

$$\Rightarrow\ E(r)=e^r$$

Falls $r=0$

$$\Rightarrow\ E(0)=1=e^0$$

Schließlich seien $x,y\in\mathbb{R}$ und $x<y$, also $y-x>0$ und damit

$$E(y-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y-x)^n}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{(y-x)^n}{n!}}_{>0}>1$$

Andererseits ist $E(y)\cdot E(-x)=\frac{E(y)}{E(x)}$

$$\Rightarrow\ E(y)>E(x)$$

Also: $\forall x,y\in\mathbb{R}\ \ x<y\ \Rightarrow\ E(x)<E(y)$.

## 3.2. Eigenschaften der Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hat also die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll}
E(0) = 1, & E(1) = e \\
\forall x, y \in \mathbb{R} & E(x+y) = E(x) \cdot E(y) \\
\forall x \in \mathbb{R} & E(x) > 0 \\
\forall x \in \mathbb{R} & E(-x) = \dfrac{1}{E(x)} \\
\forall r \in \mathbb{Q} & E(r) = e^r \\
\forall x, y \in \mathbb{R} & x < y \Rightarrow E(x) < E(y)
\end{array}$$

# 4. Potenzreihen

Sei $(c_n)$ eine Folge mit $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$$(c_n) \text{ beschränkt} \quad \Leftrightarrow \quad (c_n) \text{ nach oben beschränkt}$$

Es treten die folgenden Fälle auf

(i) $(c_n)$ ist beschränkt, dann existiert $\limsup c_n \in [0, \infty)$.

(ii) $(c_n)$ ist nicht beschränkt.

**Lemma 4.1.** Sei $(c_n)$ eine Folge mit $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ist $(c_n)$ beschränkt, so gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_n \to 0$$

**Beweis:**

„$\Leftarrow$“ klar, da $\mathrm{HW}(c_n) = \{0\}$ (dann ist 0 auch größter Häufungswert).

„$\Rightarrow$“ Sei $\varepsilon > 0$. Nach obigem Lemma gilt:

$$0 \leq c_n \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

d.h.

$$c_n \in U_\varepsilon(0) \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

□

Ist $(c_n)$ eine Folge mit $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gibt es genau eine der folgenden Möglichkeiten:

(i) $(c_n)$ ist unbeschränkt

(ii) $(c_n)$ ist beschränkt und $\limsup c_n > 0$

(iii) $(c_n)$ ist beschränkt und $\limsup c_n = 0$

**Definition 4.2.** Sei $(a_n)$ eine Folge und $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Eine Reihe der Form

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots}$$

heißt eine *Potenzreihe*.

(2) Sei $c_n := \sqrt[n]{|a_n|}, n \in \mathbb{N}$.

Setze

$$r := \begin{cases} 0 & \text{falls } (c_n) \text{ unbeschränkt} \\ \infty & \text{falls } c_n \to 0 \\ \frac{1}{\limsup c_n} & \text{falls } c_n \text{ beschränkt und } \limsup c_n > 0 \end{cases}$$

Dann heißt $r$ *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Im folgenden betrachten wir Potenzreihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

d.h. solche Potenzreihen, bei denen $x_0 = 0$. Der allgemeine Fall $x_0 \in \mathbb{R}$ lässt sich durch die Transformation $y = x - x_0$ auf diesen Spezialfall zurückführen.

**Satz 4.3.** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sei eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r$.

(1) Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur für $x = 0$.

(2) Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(3) Ist $r \in (0, \infty)$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für $|x| < r$ und sie divergiert für $|x| > r$.

Für $|x| = r$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

**Beweis:** Sei $x \in \mathbb{R}$ und $c_n := \sqrt[n]{|a_n|}, b_n := a_n x^n, n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt: $\sqrt[n]{|b_n|} = (|a_n| \cdot |x^n|)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = c_n \cdot |x|\,, \quad n \in \mathbb{N}$.

(1) $r = 0 \quad \Rightarrow \quad (c_n)$ ist unbeschränkt.

$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{|b_n|}$ unbeschränkt für $x \neq 0$.

$\overset{3.14}{\Rightarrow} \quad \sum b_n$ divergiert für $x \neq 0$.

Also: $\sum b_n$ konvergiert nur für $x = 0$.

(2) $r = \infty \quad \Rightarrow \quad c_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{|b_n|} \to 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

$\overset{3.14}{\Rightarrow} \quad \sum b_n$ konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(3) Sei $r \in (0, \infty)$ und $\delta := \limsup c_n$, also $r = \frac{1}{\delta}$.

Dann gilt:

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = \delta \cdot |x| = \frac{|x|}{r} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < r$$

oder

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| > r$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Wurzelkriterium 3.14.

$\square$

**Beispiel 4.4.**

(1) Bekannt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Also: $r = \infty$ nach 4.3.

Es ist $a_n = \frac{1}{n!}$, also $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n!}\right)^{-1} = 0.$

(2) Bekannt: die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ (hier: $a_n = 1$) konvergiert absolut für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| \geq 1$.

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $r = 1$, $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

(3) Betrachte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (hier: $a_0 = 0$ , $a_n = n^{-1}$).

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$$

$$\Rightarrow \quad \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \text{Konvergenzradius} \quad r = \frac{1}{1} = 1$$

Die Potenzreihe konvergiert also für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$.

Für $|x| = 1$:

1. Fall $x = 1$: $\sum \frac{1}{n}$ divergiert $\quad\Rightarrow\quad$ die Potenzreihe divergiert.

2. Fall $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium.

$\Rightarrow$ die Potenzreihe konvergiert (aber nicht absolut).

(4) Betrachte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (hier: $a_0 = 0$ , $a_n = \frac{1}{n^2}(n > 0)$).

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1 \quad \text{also} \quad \limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \text{Konvergenzradius} \quad r = \frac{1}{1} = 1$$

Die Potenzreihe konvergiert also absolut für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$.

Für $|x| = 1$:

1. Fall $x = 1$: $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert absolut $\quad\Rightarrow\quad$ die Potenzreihe konvergiert absolut.

2. Fall $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergiert absolut $\quad\Rightarrow\quad$ die Potenzreihe konvergiert absolut.

(5) Betrachte $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ (hier: $a_n = n^n$).

$$c_n := \sqrt[n]{|a_n|} = n \quad\Rightarrow\quad (c_n) \text{ ist unbeschränkt}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Konvergenzradius} \quad r = 0$$

Die Potenzreihe konvergiert also nur für $x = 0$.

(6) Betrachte $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n}, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n3^n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$.

$$c_n := \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{n}}{2}, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{3\sqrt[n]{n}}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{HW}(c_n) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}, \quad \limsup c_n = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Konvergenzradius} \;\; r = 2$$

Die Potenzeihe konvergiert also absolut für $|x| < 2$ und divergiert für $|x| > 2$.

Ist $|x| = 2$, so gilt für gerade $n$:

$|a_n x^n| = \frac{n}{2^n}|x|^n = n \quad \Rightarrow \quad a_n x^n$ ist keine Nullfolge

$\Rightarrow \quad \sum a_n x^n$ divergiert für $|x| = 2$.

Die Beispiele (2), (3) und (4) zeigen: für $|x| = 1$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

## 4.1. Der Cosinus

Betrachte:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

d.h. $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$, $a_{2n+1} = 0$.

$$\Rightarrow \quad \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{1}{\sqrt[2n]{(2n)!}} \to 0$$

(Teilfolge von $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.)

$$\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0 \to 0$$

Also $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$ für $n \to \infty$.

$$\varrho = 0$$

$$r = \infty$$

$\Rightarrow$ die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Dies definiert eine Funktion

$$\cos : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \cos x := \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{cases}$$

## 4.2. Der Sinus

Ähnlich wie beim Cosinus zeigt man:

Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut.

Dies definiert eine Funktion

$$\sin : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin x := \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{cases}$$

**Satz 4.5.** Sind fast alle $a_n \neq 0$ und existiert $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| =: L$, so gilt für den Konvergenzradius $r$ der Potenzreihe $\sum a_n(x-x_0)^n$:

$$r = L$$

**Beweis:** Setze $b_n := a_n(x-x_0)^n$; dann gilt für $x \neq x_0$:

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x-x_0|$$

1. Fall: $L = 0$.

$\Rightarrow$ $\left(\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|\right)$ ist unbeschränkt.

$\Rightarrow$ $\sum b_n = \sum a_n(x-x_0)^n$ ist divergent.

$\Rightarrow$ $\sum a_n(x-x_0)^n$ konvergiert nur für $x = x_0$.

$\Rightarrow$ $r = 0$

2. Fall: $L > 0$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x-x_0| = \frac{1}{L}|x-x_0|$$

$\Rightarrow$ $\sum b_n = \sum a_n(x-x_0)^n$ ist konvergent, falls $\frac{1}{L}|x-x_0| < 1$, und ist divergent, falls $\frac{1}{L}|x-x_0| > 1$.

Also konvergent, falls $|x-x_0| < L$ und divergent, falls $|x-x_0| > L$.

$\Rightarrow$ $r = L$

□

**Satz 4.6.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ seien zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien $r_1$ bzw $r_2$.

Setze:

$$R := \begin{cases} \min\{r_1, r_2\} & \text{falls } r_1 < \infty \text{ oder } r_2 < \infty \\ \infty & \text{falls } r_1 = \infty \text{ und } r_2 = \infty \end{cases}$$

Dann ist der Konvergenzradius der Produktreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

(mit $c_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$)

$$\geq R$$

und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right)$$

für $|x-x_0| < R$.

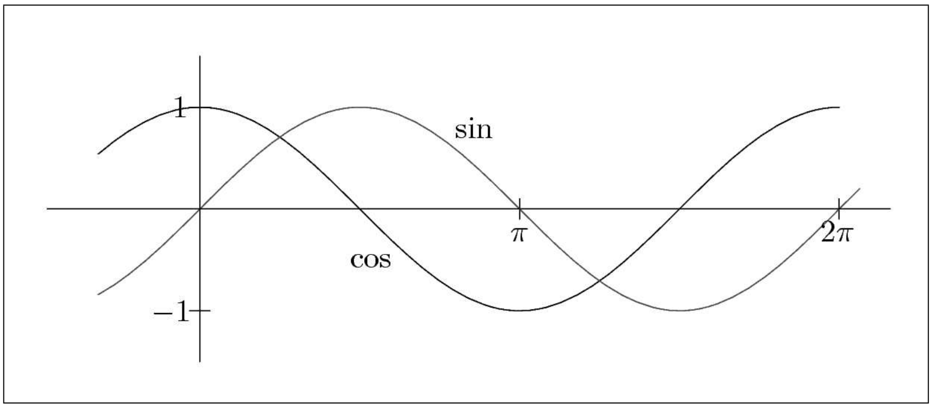



Abbildung 4.1.: Sinus und Cosinus

## 4.3. Weiteres zu Sinus und Cosinus

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Offenbar gilt:

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

Ähnlich wie in der Exponentialreihe $\big(E(x+y) = E(x) \cdot E(y)\big)$ zeigt man mit obigem Satz die folgenden Additionstheoreme:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

Weiterhin gilt offensichtlich:

$$\sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1$$

Damit folgt:

$$1 = \cos(0) = \cos\big(x + (-x)\big) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

Insbesondere gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2(x) \leq \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \big|\cos(x)\big| \leq 1$$

genauso

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \big|\sin(x)\big| \leq 1$$

# 5. $g$-adische Entwicklungen

Sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$ fest in diesem Abschnitt.

Für $a \in \mathbb{R}, a > 0$ existiert genau ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$k \leq a < k+1$$

Setze $[a] := k$ (größte ganze Zahl $\leq a$, Ganzteil von $a$, Gaussklammer).

Setze $z_0 := [a] \;\Rightarrow\; z_0 \leq a < z_0 + 1$.

Setze $z_1 := \big[(a-z_0)g\big] \;\Rightarrow\; z_1 \;\leq\; (a-z_0)g \;<\; z_1+1$.

$$\Rightarrow \quad z_0 + \frac{z_1}{g} \;\leq\; a \;<\; z_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{1}{g}$$

Setze $z_2 := \left[\left(a - z_0 - \frac{z_1}{g}\right) g^2\right] \;\Rightarrow\; z_2 \;\leq\; \left(a - z_0 - \frac{z_1}{g}\right) g^2 \;<\; z_2 + 1$.

$$\Rightarrow \quad z_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} \;\leq\; a \;<\; z_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} + \frac{1}{g^2}$$

Es gilt $z_1 \leq g-1$, $z_2 \leq g-1 \ldots$, denn:

Wäre $z_1 > g-1$, so $z_1 \geq g$ (da beide in $\mathbb{N}$), daher

$$\frac{z_1}{g} \;\geq\; 1 \quad\Rightarrow\quad z_0 + 1 \;\leq\; z_0 + \frac{z_1}{g} \;\leq\; a \;<\; z_0 + 1 \quad \lightning$$

$z_2 \leq g-1$ analog.

$z_0, z_1, z_2, \ldots$ seien schon definiert. Setze

$$z_{n+1} := \left[\left(a - z_0 - \frac{z_1}{g} - \frac{z_2}{g^2} - \cdots - \frac{z_n}{g^n}\right) \cdot g^{n+1}\right]$$

Dies definiert eine Folge $(z_n)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; z_n \in \mathbb{N}_0,\; \forall n \geq 1 : \; z_n \leq g-1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad z_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} + \cdots + \frac{z_n}{g^n} \leq a < z_0 + \cdots + \frac{z_n}{g^n} + \frac{1}{g^n}$$

**Satz 5.1.** Ist $(\tilde{z}_n)$ eine weitere Folge mit obiger Eigenschaft, so gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \tilde{z}_n = z_n$$

Betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \frac{1}{g^n}$$

Es gilt $\forall n \geq 1 \;\; 0 \leq \frac{z_n}{g^n} \leq \frac{g-1}{g_n}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} = (g-1) \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{g^n}$ ist konvergent (geometrische Reihe). Aus dem Majorantenkriterium folgt, dass auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n \frac{1}{g^n}$ konvergent ist.

Setze $\forall n \; s_n := z_0 + \frac{1}{g} + \dots + \frac{z_n}{g^n}$. Nach obiger Eigenschaft gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n \;\leq\; a \;<\; s_n + \underbrace{\frac{1}{g_n}}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} z_n \frac{1}{g^n} = a$$

Dafür *schreiben* wir:

$$a = z_0, z_1 z_2 z_3 z_4 \dots$$

**Beispiel 5.2.** (Setze $g = 10$)

(1) $a = 1$; $z_0 \leq a < z_0 + 1, z_0 \in \mathbb{N}_0 \;\Rightarrow\; z_0 = 1$

$$z_1 = [(a - z_0)g] = 0; \qquad z_2 = \left[(a - z_0 - \tfrac{z_1}{g})g^2\right] = 0 \qquad \dots$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 1{,}00000\dots$$

(2) $a = \frac{1}{3}$; $z_0 = [a] = 0$.

$$z_1 = \left[\left(\tfrac{1}{3} - 0\right) \cdot 10\right] = 3 \qquad z_2 = \left[\left(\tfrac{1}{3} - 0 - 3 \cdot \tfrac{1}{10}\right) \cdot 100\right] = 3 \qquad \dots$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{3} = 0{,}33333\dots$$

**Definition 5.3.** Sei $b \in \mathbb{R}$ und $b < 0$; setze $a := -b > 0$. Sei also $a = z_0, z_1 z_2 \dots$ die $g$-adische Darstellung von $a$. Dann definiere $-z_0, z_1 z_2 \dots$ als die $g$-adische Darstellung von $b$.

**Bemerkung 5.4.** Bei Definition des Ganzteiles ($z_0 \in \mathbb{N}_0,\; z_0 \leq a < z_0 + 1$) hätte man genauso gut $z_0 \in \mathbb{Z},\; z_0 < a \leq z_0 + 1$ verlangen können. Das hätte für die o.g. Eigenschaften ergeben:

$$z_0 + \tfrac{z_1}{g} + \dots + \tfrac{z_n}{g^n} < a \leq z_0 + \tfrac{z_1}{g} + \dots + \tfrac{z_n}{g^n} + \tfrac{1}{g^n}$$

Dann hätten wir erhalten (für $g = 10$):

$$1 = 0{,}9999\dots$$

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}4999999\dots$$

$\Rightarrow$ Wir bleiben beim Alten.

**Satz 5.5.** Ist $a = z_0, z_1 z_2 \ldots$ die $g$-adische Entwicklung von $a$ gemäß der alten Ungleichung, so ist der Fall $z_n = g - 1$ für fast alle $n$ nicht möglich. (vgl. 9er-Periode)

**Beweis:** *Annahme:* $z_n = g - 1$ für fast alle $n$.

$$\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m \quad z_n = g - 1$$

$$\Rightarrow \quad a = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \frac{1}{g^n} = \sum_{n=0}^{m-1} z_n \frac{1}{g^n} + \sum_{n=m}^{\infty} (g-1) \frac{1}{g^n} = s_{m-1} + \frac{g-1}{g^m} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{g^{n-m}} = s_{m-1} + \frac{1}{g^{m-1}}$$

wegen

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{g^{n-m}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{g^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{g}} = \frac{g}{g-1}$$

$$s_{m-1} + \frac{1}{g^{m-1}} = z_0 + \tfrac{z_1}{g} + \cdots + \tfrac{z_{m-1}}{g^{m-1}} + \tfrac{1}{g^{m-1}} > a \quad \lightning$$

□

**Satz 5.6.** $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

**Beweis:** Es genügt zu zeigen: $[0,1)$ ist überabzählbar.

*Annahme:* $[0,1)$ ist abzählbar, d.h. es existiert eine Folge $(a_n)$ in $[0,1)$ mit

$$[0,1) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

O.B.d.A. können wir annehmen, dass $a_n \neq a_m$ für $n \neq m$ gilt.

Stelle jedes $a_n$ durch seine 3-adische (triadische) Entwicklung dar:

$$a_n = \underbrace{z_0^{(n)}}_{=0}, z_1^{(n)} z_2^{(n)} z_3^{(n)} z_4^{(n)} \ldots$$

mit $z_i^{(n)} \in \{0,1,2\}$. Definiere Folge $(z_k)$ durch:

$$z_k := \begin{cases} 1 & \text{falls } z_k^{(k)} = 0 \text{ oder } z_k^{(k)} = 2 \\ 0 & \text{falls } z_k^{(k)} = 1 \end{cases}$$

Setze $a := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{3^n}$

$$\Rightarrow \quad a \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \ = \ \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} \ = \ \frac{1}{3} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j} \ = \ \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a \in [0,1)$$

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad a = a_n$$

Ferner ist aber $a = 0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ Also insbesondere: $z_n = z_n^{(n)}$ ($n$-te Ziffer von $a$ und $a_n$ stimmen überein).

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Definition der $z_k$. □

# 6. Grenzwerte bei Funktionen

## 6.1. Allgemeines

**Definition 6.1.** Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$.

$x_0$ heißt *Häufungspunkt* von $D$, wenn eine Folge $(x_n)$ in $D$ existiert mit:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \neq x_0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

**Beispiel 6.2.**

(1) $D = (0, 1]$.

Dann: $x_0 \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von $D \;\Leftrightarrow\; x_0 \in [0, 1]$ Denn: jeder Punkt in dem Intervall kann Häufungspunkt sein, aber auch 0.

$\Big[$ setze $x_n = x_0 \pm \frac{1}{n}$, $n$ hinreichend groß $\Big]$

(2) $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$D$ hat genau einen Häufungspunkt, nämlich 0.

(3) $D$ *endlich* $\;\Rightarrow\;$ $D$ hat keine Häufungspunkte.

(4) Sei $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

Dann hat die Folge $(a_n)$ die Häufungs*werte* 1 und $-1$; aber $D := \{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \{1, -1\}$ hat keine Häufungs*punkte*.

**Bezeichnung:**

Ist $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, so sei

$$D_\varepsilon(x_0) := U_\varepsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$$

**Lemma 6.3.** Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$x_0$ ist Häufungspunkt von $D \;\Leftrightarrow\;$ Jede $\varepsilon$-Umgebung von $x_0$ enthält einen von $x_0$ verschiedenen Punkt aus $D$.

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (D \setminus \{x_0\}) \cap U_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad D_\varepsilon \neq \emptyset$$

**Beweis:**

„$\Rightarrow$“: Sei $x_0$ Häufungspunkt von $D$, also existiert Folge $(x_n)$ in $D$ mit $x_n \neq x_0$ für alle $n$, und $x_n \to x_0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 \quad |x_n - x_0| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x_n \in U_\varepsilon(x_0)$$

Insbesondere für $n = n_0$: $x_{n_0} \in U_\varepsilon(x_0)$.

„$\Leftarrow$“: Zu $\varepsilon = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ existiert nach Voraussetzung ein $x_n \in \big(D \setminus \{x_0\}\big) \cap U_\varepsilon(x_0)$. Dies definiert die Folge $(x_n)$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_0)$$

d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$$

Also $x_n \to x_0$.

$\Rightarrow$ $x_0$ ist Häufungspunkt von $D$.

$\square$

Ab jetzt sei in diesem Abschnitt stets $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $D$.

**Definition 6.4.** $f : D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen und schreiben:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D \setminus \{x_0\} \text{ mit } x_n \to x_0 \text{ gilt: } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a.$$

Andere Schreibweise: $f(x) \to a$ für $x \to x_0$.

**Bemerkung 6.5.** Falls $x_0 \in D$, so ist der Funktionswert $f(x_0)$ in obiger Definition *irrelevant*. Für die Existenz und den Wert von $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ist nur das Verhalten von $f$ „in der Nähe“ von $x_0$ relevant.

**Beispiel 6.6.**

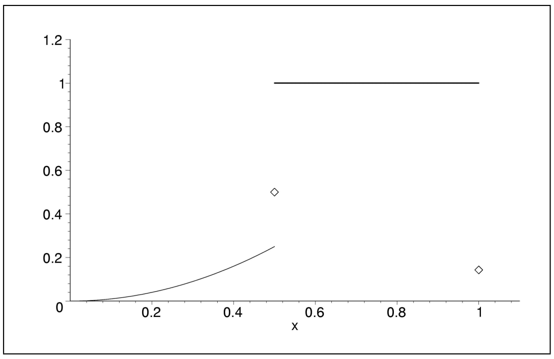
(1) $D = [0, \infty)$, $p \in \mathbb{N}$, $f(x) := \sqrt[p]{x}$.

Ist $(x_n)$ Folge in $D$ mit $x_n \to x_0$, so folgt: $\sqrt[p]{x_n} \to \sqrt[p]{x_0}$ Das heißt:

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{x_0}$$

(2) $D = (0, 1]$

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{falls } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{falls } \frac{1}{2} < x < 1 \\ \frac{1}{7} & \text{falls } x = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$




Dann $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

Aber $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ existiert nicht.

Denn für $x_n := \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ gilt $x_n \to \frac{1}{2}$ und $f(x_n) \to \frac{1}{4}$ und für $\tilde{x}_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ gilt: $\tilde{x}_n \to \frac{1}{2}$ und $f(\tilde{x}_n) \to 1$.

Aber: $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x \in (0, \frac{1}{2})}} f(x)$ existiert und ist $\frac{1}{4}$. Dafür schreiben wir

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}-} f(x) = \frac{1}{4} \quad \text{linksseitiger Grenzwert}$$

Analog:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}+} f(x) = 1 \quad \text{rechtsseitiger Grenzwert}$$

(3) $D = \mathbb{R}, E(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für $x \in \mathbb{R}$, d.h. $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

*Behauptung:* Für alle $|x| \leq 1$ gilt: $|E(x) - E(0)| \leq |x| \cdot (e - 1)$.

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
\big|E(x) - E(0)\big| &= \left|1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots - 1\right| = \left|x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right| \\
&= |x| \cdot \left|1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots\right| \\
&\leq |x| \cdot \left(1 + \frac{|x|}{2!} + \frac{|x^2|}{3!} + \cdots\right) \\
&\underset{|x| \leq 1}{\leq} |x| \cdot \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right) = |x| \cdot \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots - 1\right) \\
&= |x| \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1\right) = |x| \cdot (e - 1)
\end{aligned}$$

□

Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\big|E(x) - E(x_0)\big| &= \big|E(x - x_0 + x_0) - E(x_0)\big| \\
&= \big|E(x - x_0) \cdot E(x_0) - E(x_0)\big| \\
&= E(x_0) \cdot \big|E(x - x_0) - 1\big|
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\big|E(x) - E(x_0)\big| \leq E(x_0) \cdot |x - x_0| \cdot (e - 1) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| \leq 1$$

Ist $(x_n)$ eine Folge mit $x_n \to x_0$, so gilt $|x_n - x_0| \to 0$, also $|x_n - x_0| \leq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Somit:

$$\big|E(x_n) - E(x_0)\big| \leq \underbrace{E(x_0) \cdot |x_n - x_0| \cdot (e - 1)}_{\to 0} \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad E(x_n) \to E(x_0)$$

Also:

$$\lim_{x \to x_0} E(x) = E(x_0)$$

(4) Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$.

Sei $f : (-r, r) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

und $g : (-r, r) \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) := \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n}_{\text{Konvergenzradius wieder } r}$.

Sei $x_0 \in (-r, r)$ und $\delta > 0$ mit $|x_0| + \delta \in (0, r)$.

Dann gilt für $|x - x_0| \leq \delta$: $x \in (-r, r)$.

$$\begin{aligned}
\big|f(x) - f(x_0)\big| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{(x^n - x_0^n)}_{=(x-x_0)\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-k-1}} \right| \\
&\leq |x - x_0| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |x|^k \cdot |x_0|^{n-k-1} \\
&\leq |x - x_0| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot \big(|x_0| + \delta\big)^{n-1} \\
&= |x - x_0| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \big|a_{n+1}\big| \cdot \big(|x_0| + \delta\big)^{n} \\
&= |x - x_0| \cdot g\big(|x_0| + \delta\big)
\end{aligned}$$

D.h. für $x_0 \in (-r, r), \delta > 0$ mit $|x_0| + \delta \in (0, 1)$ und $|x - x_0| \leq \delta$ gilt:

$$\big|f(x) - f(x_0)\big| \;\leq\; |x - x_0| \cdot g\big(|x_0| + \delta\big)$$

Wie im vorigen Beispiel zeigt man:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

**Satz 6.7.** Sei $f : D \to \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \underbrace{\forall x \in D_\delta(x_0) \quad \big|f(x) - a\big| < \varepsilon}_{(*)}$$

**Beweis:**

„$\Rightarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. *Annahme:* Es gibt kein $\delta$ mit der Eigenschaft (*). D.h.

$$\forall \delta > 0\ \exists x \in D_\delta(x_0) \quad |f(x) - a| \geq \varepsilon$$

Dann finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D_{\frac{1}{n}}(x_0)$ mit $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$.

Für die Folge $(x_n)$ gilt:

- $(x_n)$ ist Folge in $D \setminus \{x_0\}$
- $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$
- $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

Also: $x_n \to x_0$ aber $f(x_n) \not\to a$ $\lightning$ zu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

„$\Leftarrow$": Sei $(x_n)$ eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$. Zu zeigen: $f(x_n) \to a$.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$ derart, dass (*) erfüllt ist.

Da $x_n \to x_0$ gilt $x_n \in D_\delta(x_0)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Nach (*) gilt also: $|f(x_n) - a| < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Somit: $f(x_n) \to a$.

$\square$

**Satz 6.8.**

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert $\Leftrightarrow$ für jede Folge $(x_n)$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ konvergiert die Folge $\big(f(x_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$.

(in diesem Fall: $f(x_n) \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ für jede dieser Folgen.)

(2) (Cauchy-Kriterium) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in D_\delta(x_0) \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

(ohne Beweis)

**Satz 6.9.** Gegeben: Funktionen $f, g, h : D \to \mathbb{R}$. Es mögen $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =: a$ , $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =: b$ existieren. Dann gilt:

(1) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$$

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = a \cdot b$$

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |a|$$

(2) Falls es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\forall x \in D_\delta(x_0) \quad f(x) \le g(x)$$

so gilt $a \le b$.

(3) Falls es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\forall x \in D_\delta(x_0) \quad f(x) \le h(x) \le g(x)$$

und außerdem $a = b$ gilt, so gilt $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a = b$.

(4) Ist $b \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $|g(x)| \ge \frac{|b|}{2} > 0$ für alle $x \in D_\delta(x_0)$ und für $\frac{f}{g} : D_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$$

**Beweis:** (1)–(3) mit dem entsprechenden Satz über Folgen.

(4) Nach (1) gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = |b| > 0$. Setze nun $\varepsilon := \frac{|b|}{2}$.

Nach obigem Satz existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\forall x \in D_\delta(x_0) \quad \big||g(x)| - |b|\big| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in D_\delta(x_0) \quad |g(x)| - |b| > -\frac{|b|}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in D_\delta(x_0) \quad |g(x)| > \frac{|b|}{2}$$

Rest mit Satz über Folgen. □

**Definition 6.10.**

(1) Sei $(x_n)$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \left| \begin{array}{c} +\infty \\ -\infty \end{array} \right| \quad :\Leftrightarrow \quad \forall c \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad \left| \begin{array}{c} x_n > c \\ x_n < c \end{array} \right|$$

(2) $D \subset \mathbb{R}$, $x_0$ Häufungspunkt von $D$, $f : D \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \left| \begin{array}{c} +\infty \\ -\infty \end{array} \right| \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D \setminus \{x_0\} \text{ mit } x_n \to x_0 \text{ gilt: } f(x_n) \to \left| \begin{array}{c} +\infty \\ -\infty \end{array} \right|$$

(3) Sei zusätzlich $D$ nicht nach oben bzw. unten beschränkt.

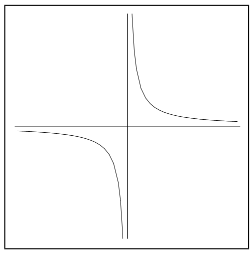
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \to \pm\infty \text{ gilt: } f(x_n) \to a$$

(Dabei $a = +\infty$ und $a = -\infty$ zugelassen.)

**Beispiel 6.11.**

(1) $\frac{1}{x} \to +\infty$ für $x \to 0+$
$\frac{1}{x} \to -\infty$ für $x \to 0-$
$\frac{1}{x} \to 0$ für $|x| \to \infty$

(2) $x^p \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$, falls $p \in \mathbb{N}$, $p$ ungerade
$x^p \to +\infty$ für $x \to \pm\infty$, falls $p \in \mathbb{N}$, $p$ gerade



Skizze zu Beispiel (1)

## 6.2. Exponentialfunktion

Sei $p \in \mathbb{N}_0$ fest. Für $x > 0$ gilt

$$E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots > \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}$$

$$\frac{E(x)}{x^p} > \frac{x}{(p+1)!}$$

Wegen $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{(p+1)!} = +\infty$ gilt also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{E(x)}{x^p} = +\infty$$

also insbesondere

$$\lim_{x\to\infty} E(x) = +\infty$$

($\Rightarrow$ Die $E$-Funktion „wächst für $x \to +\infty$ stärker als jede Potenz von $x$“)

Wegen $\forall x < 0 \;\; E(x) = \frac{1}{E(-x)}$ gilt:

$$\lim_{x\to-\infty} E(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{E(-x)} = \lim_{\tilde{x}\to+\infty} \frac{1}{E(\tilde{x})} = 0$$

# 7. Stetige Funktionen

**Definition 7.1.** Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig in* $x_0 \in D$ $\quad :\Leftrightarrow \quad$ Für jede Folge $(x_n)$ in $D$ mit $x_n \to x_0$ gilt:

$$f(x_n) \to f(x_0)$$

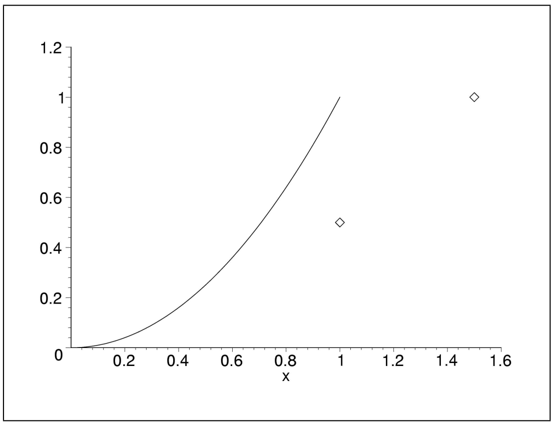
$f$ heißt *stetig auf* $D$, wenn $f$ in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

$$C(D) := \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ stetig auf } D\} \quad \text{„Menge der stetigen Funktionen auf } D\text{“}$$

**Beispiel 7.2.**

(1) $D = [0,1] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x = 1 \\ 1 & \text{falls } x = \frac{3}{2} \end{cases}$$




Klar: $f$ ist stetig in jedem $x_0 \in [0,1)$.
$f$ ist nicht stetig in $x_0 = 1$.
$f$ ist stetig in $x_0 = \frac{3}{2}$:
Sei dazu $(x_n)$ Folge in $D$ mit $x_n \to \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad x_n = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \geq n_0 \quad f(x_n) = f\left(\tfrac{3}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad f(x_n) \to 1 = f\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ $f$ stetig in $\frac{3}{2}$.

(2) $f(x) := \sqrt[p]{x}$ definiert auf $D := [0,\infty)$. Schon gezeigt:

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{x_0} \text{ für alle } x_0 \in [0,\infty)$$

Also $f \in C\big([0,\infty)\big) =: C[0,\infty)$.

**Satz 7.3.** Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

(1) $f$ ist stetig in $x_0$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D \quad \Big[|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ \big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon\Big]}$$

„$\varepsilon$-$\delta$–Definition der Stetigkeit“

(2) Sei zusätzlich $x_0$ Häufungspunkt von $D$. Dann gilt:

$f$ ist stetig in $x_0$ $\quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

**Satz 7.4.**

(1) Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so sind

$$\alpha f + \beta g, \quad f \cdot g, \quad |f|$$

stetig in $x_0$.

Gilt ferner $g(x_0) \neq 0$, so setze $\tilde{D} := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$. Dann ist $\frac{f}{g} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in \tilde{D}$.

(2) $C(D)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

**Satz 7.5.** $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig in $x_0$, $g : E \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion auf $E \subset \mathbb{R}$ mit $E \supset f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ und $g$ sei stetig in $f(x_0) =: y_0$. Dann gilt

$$g \circ f : \ D \to \mathbb{R}$$

ist stetig in $x_0$.

**Beweis:** Sei $(x_n)$ eine Folge in $D$ mit $x_n \to x_0$; $y_n := f(x_n)$.

Weil $f$ stetig ist in $x_0 \quad \Rightarrow \quad y_n \to y_0$;

da $g$ stetig ist in $y_0$

$$\Rightarrow \underbrace{g(y_n)}_{(g\circ f)(x_n)} \to \underbrace{g(y_0)}_{(g\circ f)(x_0)} .$$

$\square$

## 7.1. Potenzreihen

**Satz 7.6.** $\sum a_n(x-x_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Ferner sei $D := (x_0-r, x_0+r)$ [$D = \mathbb{R}$, falls $r = \infty$] und $f(x) := \sum a_n(x - x_0)^n$ für $x \in D$.

Dann ist $f \in C(D)$ ($f$ stetig auf $D$).

**Bemerkung 7.7.**

(1) $E(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ sind also stetig auf $\mathbb{R}$.

Ist zum Beispiel $f(x) := E(\cos(x))$, so ist $f = E \circ \cos$ stetig auf $\mathbb{R}$.

(2) Sind $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $q(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^k$ Polynome, so sind $p$ und $q$ stetig auf $\mathbb{R}$ und $\frac{p}{q}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{x | q(x) = 0\}$.

(3) Für $z_0 \in D$ besagt obiger Satz insbesondere:

$$\lim_{x\to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \lim_{x\to z_0} f(x) = f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left[\lim_{x\to z_0} (x-x_0)^n\right]$$

**Beispiel 7.8.** *Behauptung:* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

**Beweis:** Für $x \neq 0$ gilt:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \right) = \underbrace{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots}_{\text{KR}=\infty \Rightarrow \text{stetig in } x=0} \to 1$$

□

**Beispiel 7.9.** *Behauptung:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{E(x)-1}{x} = 1$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \frac{E(x)-1}{x} &= \frac{1}{x} \cdot \left( \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \right) - 1 \right) = \frac{1}{x} \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \right) \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \cdots \longrightarrow 1 + \frac{0}{2} + \frac{0^2}{6} + \cdots = 1 \end{aligned}$$

□

**Korollar 7.10.** Sei $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(x_0+h) - E(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{E(x_0)E(h) - E(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} E(x_0)\frac{E(h)-1}{h} = E(x_0)$$

## 7.2. Zwischenwertsatz

**Satz 7.11** (Zwischenwertsatz)**.** Sei $f \in C[a,b]$ und $y_0$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$, genauer:

$$y_0 \in \begin{cases} [f(a), f(b)] & \text{falls } f(a) < f(b) \\ [f(b), f(a)] & \text{falls } f(a) \geq f(b) \end{cases}$$

*Behauptung:*

$$\exists x_0 \in [a,b] : \ f(x_0) = y_0$$

**Beweis:**

1. Fall: $f(a) = y_0$ oder $f(b) = y_0 \quad \Rightarrow \quad$ fertig.

2. Fall: $f(a) \neq y_0 \neq f(b)$. Dann ist $f(a) \neq f(b)$. O.B.d.A. sei $f(a) < y_0 < f(b)$.

Setze $M := \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq y_0\}$

Es ist $M \neq \emptyset$ (weil z.B. $a \in M$) und $M$ beschränkt (da $M \subset [a,b]$). Also existiert $x_0 := \sup M$.

- Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $x_0 - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von $M$ und wir finden ein $x_n \in M$ mit $x_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq x_0$. Somit gilt $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.

  Wegen $x_n \in [a,b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt auch $x_0 \in [a,b]$. Da $f$ stetig ist, folgt $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$.

  Wegen $f(x_n) \leq y_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f(x_0) \leq y_0$.

- Nun ist $x_0 < b$ (denn $x_0 = b \Rightarrow f(b) = f(x_0) \leq y_0 < f(b)$ $\lightning$).

  Setze $z_n := x_0 + \frac{1}{n}$ , $n \in \mathbb{N}$.

  Dann ist $z_n \in [a, b]$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.

  Da $f$ stetig ist gilt $f(z_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$.

  Wegen $z_n > x_0$ gilt $z_n \notin M$, also $f(z_n) > y_0$.

  Somit $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) \geq y_0$.

Also folgt $f(x_0) = y_0$.

$\square$

**Korollar 7.12.** Früher behauptet: Zu $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $x \geq 0$ mit $x^n = a$

**Beweis:** Eindeutigkeit wurde bereits bewiesen. Beweis der Existenz:

- $a = 0$: $x = 0$ leistet das Verlangte.
- $a > 0$; $f(x) := x^n, z_0 := a + 1$

  $$\Rightarrow \; f(z_0) = (a+1)^n \;\geq\; 1 + na \;\geq\; 1 + a \;>\; a$$

  Also: $f(0) = 0 < a < f(z_0)$ Aus dem Zwischenwertsatz folgt:

  $$\Rightarrow \; \exists x \in [0, a+1] : \; f(x) = a$$

  also: $x^n = a$.

$\square$

**Exponential-Funktion**

$$E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

*Behauptung:* $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

**Beweis:** Es gilt: $E(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ also $E(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$.

Sei $y_0 \in (0, \infty)$. Bereits gezeigt: $E(x) \to \infty$ für $x \to \infty$; $E(x) \to 0$ für $x \to -\infty$.

$$\Rightarrow \; \exists b \in \mathbb{R} : y_0 < E(b), \; \exists a \in \mathbb{R} : \; E(a) < y_0$$

$E$ ist streng wachsend $\Rightarrow a < b$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow \; \exists x_0 \in [a, b] : \; E(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 \in E(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \; (0, \infty) \subset E(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \; (0, \infty) = E(\mathbb{R})$. $\square$

## 7.3. Nullstellensatz von Bolzano

**Korollar 7.13** (Nullstellensatz von Bolzano)**.** Sei $f \in C[a, b]$ und $f(a) \cdot f(b) < 0$

$$\Rightarrow \; \exists x_0 \in [a, b] : \; f(x_0) = 0$$

**Beweis:** Setze $y_0 = 0$ im Zwischenwertsatz. $\square$

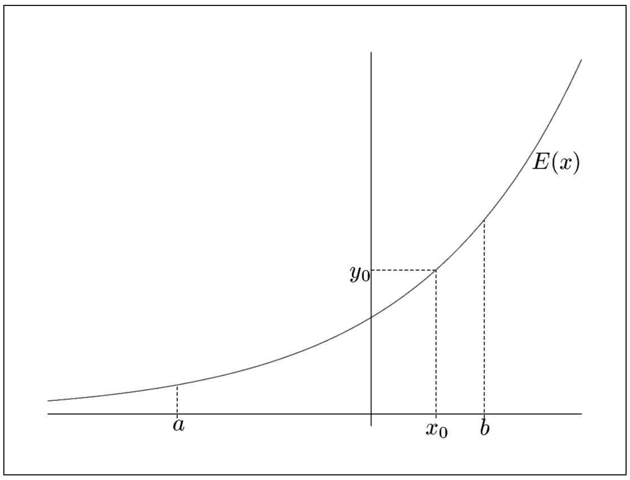



Abbildung 7.1.: Zum Beweis des Wertebereichs der Exponentialfunktion

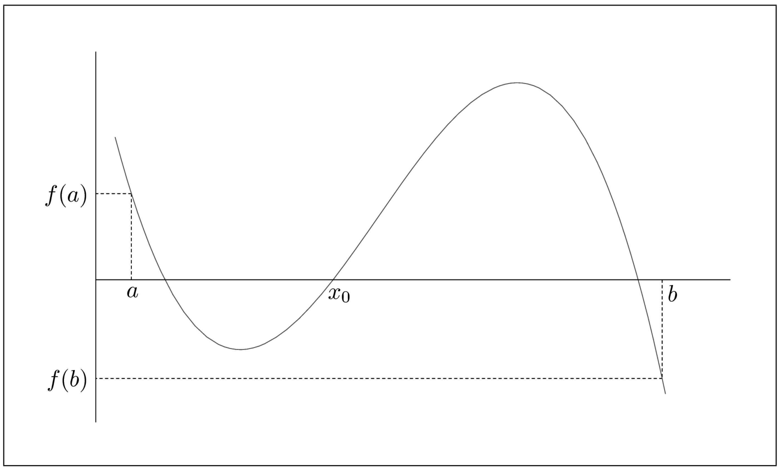



Abbildung 7.2.: Nullstellensatz von Bolzano

## 7.4. Kompakte Mengen

**Definition 7.14.**

(1) $D \subset \mathbb{R}$ heißt *abgeschlossen* $:\Leftrightarrow$ für *jede* konvergente Folge $(x_n)$ in $D$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in D$$

(2) $D \subset \mathbb{R}$ heißt *kompakt* $:\Leftrightarrow$ $D$ ist *beschränkt* und *abgeschlossen.*

**Beispiel 7.15.**

- Endliche Mengen sind kompakt
- $D := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ist nicht abgeschlossen, da $\frac{1}{n} \to 0$ aber $0 \notin D$.

  Dagegen ist $D \cup \{0\}$ abgeschlossen (und sogar kompakt).

- Folgende Mengen sind abgeschlossen:

$$\mathbb{R}\ ,\ \ \emptyset\ ,\ \ [a,b]\ ,\ \ [a,\infty)\ ,\ \ (-\infty,a]$$

- Nicht abgeschlossen sind:

$$(a,b)\ ,\ \ (a,b]\ ,\ \ (a,\infty)\ ,\ \ [a,b)\ ,\ \ (-\infty,a)$$

- Sei $I$ ein Intervall. Dann gilt:

$$I \quad \text{ist kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad \exists a,b\in\mathbb{R}:\ a\le b \text{ und } I=[a,b]$$

**Satz 7.16.** Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$.

(1) $D$ ist kompakt $\Leftrightarrow$ jede Folge $(x_n)$ in $D$ enthält eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$.

(2) Ist $D$ kompakt, so existieren $\min D$ und $\max D$.

**Beweis:**

(1)

„$\Rightarrow$“: Sei $(x_n)$ eine Folge in $D$. Da $D$ beschränkt, ist auch $(x_n)$ beschränkt.

$\Rightarrow$ $(x_n)$ enthält eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})$ (nach Bolzano-Weierstrass).

$D$ ist abgeschlossen $\Rightarrow$ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$.

„$\Leftarrow$“: (i) *Annahme:* $D$ nicht beschränkt.

$$\Rightarrow \quad \forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in D \quad |x_n|>n$$

Nach Voraussetzung enthält $(x_n)$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})$.

Es gilt $|x_{n_k}| \ge n_k \ge n$ für jedes $n\in\mathbb{N}$ und $(x_{n_k})$ ist unbeschränkt, also nicht konvergent.

D.h. keine Teilfolge von $(x_n)$ konvergiert. $\lightning$ zur Vorraussetzung

$\Rightarrow$ $D$ ist beschränkt.

(ii) Bleibt zu zeigen: $D$ ist abgeschlossen.

Sei $(x_n)$ Folge in $D$ mit $x_0 := lim x_n$. Zu zeigen: $x_0\in D$.

Nach Vorraussetzung existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})$ mit $y_0 := \lim x_{n_k} \in D$.

$\Rightarrow$ $x_0 = y_0 \in D$.

(2) Wir zeigen nur die Existenz des Maximums.

Sei $\gamma := \sup D$ ($D$ ist beschränkt). Zu jedem $n\in\mathbb{N}$ existiert ein $x_n\in D$ mit $\gamma-\frac{1}{n} < x_n \le \gamma$.

$\Rightarrow$ $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Da $D$ abgeschlossen, gilt $\gamma\in D$.

$\square$

**Definition 7.17.** Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $f: D\to\mathbb{R}$ eine Funktion.

$f: D\to\mathbb{R}$ heißt *beschränkt* $:\Leftrightarrow$ $f(D)$ ist beschränkt ($\Leftrightarrow$ $\exists C>0\ \forall x\in D:\ |f(x)|\le C$).

**Beispiel 7.18.**

(1) $f(x) := x^2$ , $D = \mathbb{R}$

$f$ ist unbeschränkt.

(2) $f(x) := x^2$ , $D = [-1, 1]$

Es gilt: $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in D \Rightarrow f$ ist beschränkt

**Satz 7.19.** Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $D$ kompakt und $f \in C(D)$.

(1) $f(D)$ ist kompakt (insbesondere beschränkt)

(2) $\exists x_1, x_2 \in D \; \forall x \in D: \; f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

d.h. „$f$ nimmt auf $D$ ein Maximum und ein Minimum an“.

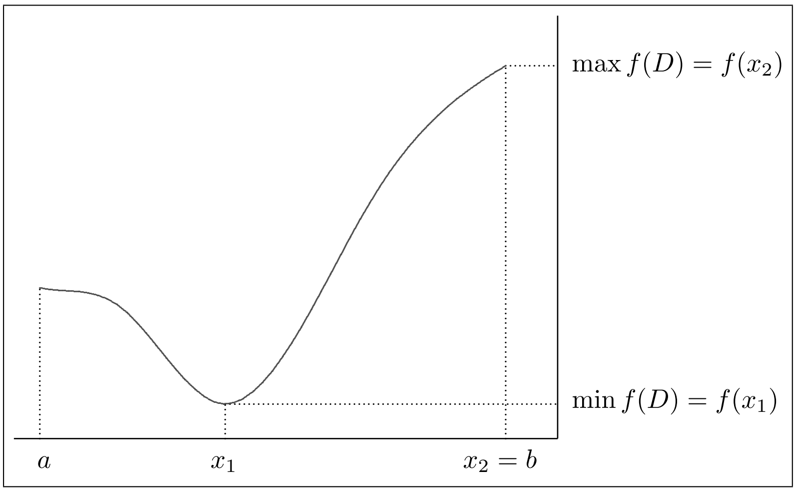



Abbildung 7.3.: Skizze zu Satz 7.19 (2). Hier: $D = [a, b]$

**Beweis:**

(1) Sei $(y_n)$ eine Folge in $f(D)$.

Dann existiert eine Folge $(x_n)$ in $D$ mit $y_n = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nach Satz 7.16 ($D$ kompakt, $(x_n) \subset D$) existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})$ von $(x_n)$ mit $x_0 := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$.

Da $f$ stetig ist, folgt $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_0) \in f(D)$.

D.h. jede Folge $(y_n)$ in $f(D)$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(y_{n_k})$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} \in f(D)$.

$\Rightarrow$ $f(D)$ ist kompakt nach Satz 7.16.

(2) Sei $s := \sup f(D)$. Zu zeigen: $s \in f(D)$.

Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $s - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von $f(D)$.

$$\Rightarrow \; \forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in D: \; s - \frac{1}{n} \; < \; f(x_n) \; \leq \; s$$

$\Rightarrow$ $(x_n)$ enthält konvergente Teilfolge $(x_{n_k})$ mit $x_0 := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$.

$f$ ist stetig $\Rightarrow$ $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ $(k \to \infty)$.

$$s - \frac{1}{n} < f(x_{n_k}) \leq s \quad \Rightarrow \quad s = f(x_0) \in f(D)$$

Analog: $\inf f(D) \in f(D)$.

□

**Bemerkung 7.20.** *Alle* Voraussetzungen im obigen Satz sind wesentlich.

(1) $D = [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$ *nicht* stetig in 1.

Hier $f(D) = [0,1)$ *nicht* kompakt und $\sup f(D) = 1$ wird nicht angenommen (d.h. $\max f(D)$ existiert nicht).

(2) $D = [0,\infty)$ abgeschlossen, aber nicht beschränkt, also nicht kompakt.

$f(x) = E(x)$ stetig. $f$ ist unbeschränkt auf $D$, denn $E([0,\infty)) = [1,\infty)$ ist nicht beschränkt.

$\Rightarrow$ $f(D)$ ist nicht kompakt und $\sup f(D)$ existiert nicht. (in $\mathbb{R}$)

(3) $D = (0,1)$ beschränkt, aber nicht abgeschlossen. (nicht kompakt)

$f(x) = \frac{1}{x}$. $f$ ist unbeschränkt auf $D$, denn $f(D) = (1,\infty)$ ist wieder unbeschränkt und $\sup f(D)$ existiert nicht in $\mathbb{R}$.

**Bemerkung 7.21.** Sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Dann:

$$M \text{ ist } \textit{Intervall} \quad \Leftrightarrow \quad \forall a,b \in M \text{ mit } a \leq b \text{ gilt: } [a,b] \subset M$$

**Satz 7.22.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C(I)$.

(1) $f(I)$ ist ein Intervall

(2) Ist $I = [a,b]$, $A := \min f(I)$, $B := \max f(I)$, so ist $f(I) = [A,B]$.

**Beweis:**

(1) Seien $\alpha, \beta \in f(I)$, o.B.d.A. sei $\alpha \leq \beta$.

Nach dem Zwischenwertsatz gilt $[\alpha,\beta] \subset f(I)$. Nach obiger Bemerkung ist dann $f(I)$ ein Intervall.

(2) klar: $f(I) \subset [A,B]$

Nach obiger Bemerkung ist $f(I)$ ein Intervall und $A, B \in f(I)$.

$\Rightarrow$ $[A,B] \subset f(I)$ nach (1).

$\Rightarrow$ $f(I) = [A,B]$

□

## 7.5. Monotonie, Umkehrfunktionen

**Definition 7.23.** Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $f$ eine Funktion.

| | | |
|---|---|---|
| (1) $f$ heißt monoton wachsend | $:\Leftrightarrow$ | $\forall x_1, x_2 \in D: \ \big[x_1 \leq x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \leq f(x_2)\big]$ |
| (2) $f$ heißt streng monoton wachsend | $:\Leftrightarrow$ | $\forall x_1, x_2 \in D: \ \big[x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) < f(x_2)\big]$ |
| (3) $f$ heißt monoton fallend | $:\Leftrightarrow$ | $\forall x_1, x_2 \in D: \ \big[x_1 \leq x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \geq f(x_2)\big]$ |
| (4) $f$ heißt streng monoton fallend | $:\Leftrightarrow$ | $\forall x_1, x_2 \in D: \ \big[x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) > f(x_2)\big]$ |
| (5) $f$ heißt [streng] monoton | $:\Leftrightarrow$ | $f$ ist entweder [streng] monoton wachsend oder fallend |

**Definition 7.24.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ($I = \mathbb{R}$ ist zugelassen).

$f : I \to \mathbb{R}$ sei *injektiv* (d.h. $\forall x_1 \neq x_2 : \ f(x_1) \neq f(x_2)$). (Damit ist $f : I \to f(I)$ bijektiv.)

Dann existiert eine Funktion $f^{-1} : f(I) \to I$ mit $f^{-1}(y) := x$, wobei zu gegebenem $y \in f(I)$ das Element $x \in I$ das *eindeutige* Element mit $f(x) = y$ ist.

$f^{-1} : f(I) \to I$ heißt *Umkehrfunktion* von $f$.

Es gilt $\forall x \in I : \ f^{-1}\big(f(x)\big) = x$, (d.h. $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_I$) bzw. $\forall y \in f(I) : \ f\big(f^{-1}(y)\big) = y$.

Nun sei $I \subset \mathbb{R}$ beliebiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Dann ist $f$ *injektiv* (denn für $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt $x_1 < x_2$ *oder* $x_2 < x_1$ und daher $\left|\begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{array}\right|$ *oder* $\left|\begin{array}{l} f(x_2) < f(x_1) \\ f(x_2) > f(x_1) \end{array}\right|$, also in jedem Fall: $f(x_1) \neq f(x_2)$).

$\Rightarrow$ Es existiert eine Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ und $f^{-1}$ ist streng monoton wachsend bzw. fallend.

**Satz 7.25.** Sei $f \in C[a, b]$ und *streng monoton*. Dann ist auch $f^{-1} \in C\big(f([a, b])\big)$.

**Beweis:** Sei etwa $f$ streng monoton *wachsend*. Nach Satz 7.22 ist $f([a, b]) = [f(a), f(b)] =: J$.

Sei $y_0 \in J$ (zu zeigen: $f^{-1}$ stetig in $y_0$). Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wir zeigen: Es gibt ein $\delta_1 > 0$ mit

$$\forall y \in J \quad \big[0 \leq y - y_0 < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon\big]$$

Analog existiert $\delta_2 > 0$ mit

$$\forall y \in J \quad \big[-\delta_2 < y - y_0 \leq 0 \ \Rightarrow \ |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon\big]$$

Mit $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ gilt dann

$$\forall y \in J \quad \Big[|y - y_0| < \delta \ \Rightarrow \ \big|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\big| < \varepsilon\Big]$$

(damit zeigen wir die Stetigkeit von $f^{-1}$ in $y_0$ nach Satz 7.3.)

Zum Nachweis der Existenz eines $\delta_1 > 0$ mit der Eigenschaft der 1. Gleichung sei $x_0 := f^{-1}(y_0) \in [a, b]$. Falls $x_0 = b$, so gilt $y_0 = f(x_0) = f(b) = \max J$, also gilt $y \in J, 0 \leq y - y_0$ *nur* für $y = y_0 \ \Rightarrow$ trivial.

Sei also $x_0 < b$. Wähle $x_1 \in [a, b]$ mit $x_0 < x_1 < x_0 + \varepsilon$. Dann sei $y_1 := f(x_1) > f(x_0)$, da $f$ streng monoton wachsend. Setze $\delta_1 := y_1 - y_0$.

Nachweis der geforderten Eigenschaft:

Sei $y \in J$, $0 \leq y - y_0 < \delta_1 = y_1 - y_0 \;\Rightarrow\; y < y_1$. Setze weiter $x := f^{-1}(y) < f^{-1}(y_1) = x_1$. Dann

$$\left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| = f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = x - x_0 < x_1 - x_0 < x_0 + \varepsilon - x_0 = \varepsilon$$

□

**Korollar 7.26.** *$I$ sei beliebiges Intervall, $f \in C(I)$ und streng monoton. Dann ist auch $f^{-1} \in C(f(I))$.*

**Beweis:** leichte Übung. □

## 7.6. Exponentialfunktion und Logarithmus

$E(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Wir wissen: $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig, $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Also existiert $E^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$\log x := \ln x := E^{-1}(x) \;\; \forall x \in (0, \infty) \quad \text{„natürlicher Logarithmus von } x\text{“}$$

Aus den schon bekannten Eigenschaften von $E$ ergibt sich:

(1) log ist auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend und nach obigem Korollar stetig.

(2) $\forall x, y > 0 : \; \log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y), \quad \log(\frac{x}{y}) = \log(x) - \log(y)$.

**Beweis:** Wir beweisen nur die erste Eigenschaft. Setze dazu $a := \log(x) + \log(y)$ und $b := \log(x \cdot y)$.

$$\begin{aligned} E(a) &= E(\log(x) + \log(y)) = E(\log(x)) \cdot E(\log(y)) = x \cdot y \\ &= E(\log(x \cdot y)) = E(b) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \;\; a = b$, da $E$ injektiv ist. □

(3) $\log(1) = 0, \; \log(e) = 1$

(4) $\log x \to +\infty$ für $x \to +\infty$; $\log x \to -\infty$ für $x \to 0+$.

(5) $\forall a > 0, r \in \mathbb{Q} : \; a^r = E(r \log a)$ (offenbar äquivalent zu $\forall a > 0, r \in \mathbb{Q} : \; \log a^r = r \cdot \log a$)
Ferner: $\log(a^{-n}) = \log\left(\frac{1}{a^n}\right) = \log 1 - \log a^n = -n \log a$.

Weiter: $\log\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \log\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log\left[\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right] = \frac{1}{n} \log a$.

Sei nun $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \log\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = \log\left[\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right] = m \cdot \log\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{m}{n} \cdot \log a$$

**Definition 7.27** (Die allgemeine Potenz)**.** Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definiere

$$\boxed{a^x := E(x \log a)}$$

(konsistent mit obigem Sachverhalt für $x = r \in \mathbb{Q}$)

Insbesondere gilt im Spezialfall $a = e$:

$$e^x = E(x \underbrace{\log e}_{=1}) = E(x)$$

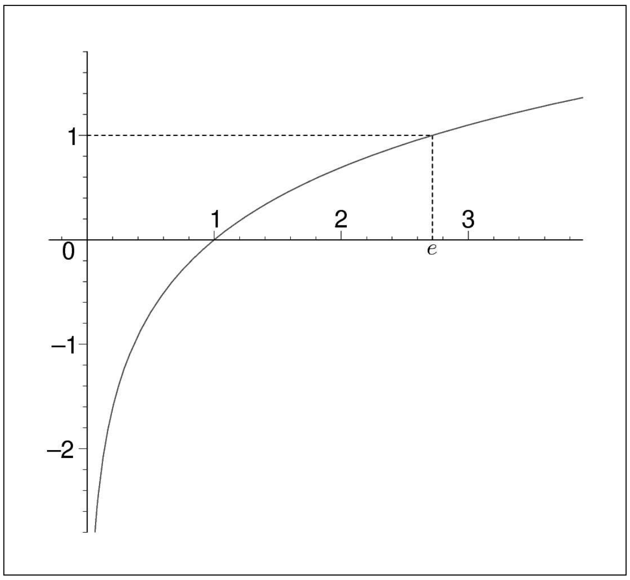



Abbildung 7.4.: Der natürliche Logarithmus

**Eigenschaften:**

(1) $x \mapsto a^x$ ist *stetig* auf $\mathbb{R}$.

(2) $a^x > 0$

(3) $a^{x+y} = E((x+y) \cdot \log a) = E(x \log a + y \log a) = E(x \log a) \cdot E(y \log a) = a^x \cdot a^y$

(4) $a^{-x} = E(-x \log a) = \frac{1}{E(x \log a)} = \frac{1}{a^x}$

(5) $\log a^x = \log\big[E(x \cdot \log a)\big] = x \log a$

(6) $(a^x)^y = E\left(y \cdot \log(a^x)\right) = E(xy \cdot \log a) = a^{xy}$

## 7.7. Verschärfter Stetigkeitsbegriff

**Erinnerung:** Sei $f \in C(D)$ und $z \in D$. Stetigkeit von $f$ in $z$ bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D \quad \Big[|x-z| < \delta \;\Rightarrow\; \big|f(x) - f(z)\big| < \varepsilon\Big]$$

($\delta$ hängt ab von $\varepsilon$ *und von* $z$)

**Beispiel 7.28.** $D = [0, \infty), f(x) = x^2, z > 0$. Sei $\varepsilon > 0$ und sei $\delta > 0$ so gewählt, dass

$$\forall x \in D \quad \Big[|x-z| < \delta \;\Rightarrow\; \big|f(x) - f(z)\big| < \varepsilon\Big]$$

Wähle dann $x := z + \frac{\delta}{2}$, dann $|x - z| = \varepsilon = \frac{\delta}{2} < \delta$, daher $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$ d.h. $\big|x^2 - z^2\big| < \varepsilon$, also wegen $x^2 - z^2 = (x-z)(x+z)$:

$$\underbrace{|x-z| \cdot |x+z|}_{=\frac{\delta}{2}(2z+\frac{\delta}{2})} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow\ \frac{\delta}{2}\cdot\left(2z+\frac{\delta}{2}\right) \;=\; \delta z+\frac{\delta^2}{4} \;>\; \delta z$$

$$\Rightarrow\ \delta z<\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \delta<\frac{\varepsilon}{z}$$

$\Rightarrow \delta$ hängt von $\varepsilon$ *und von* $z$ ab.

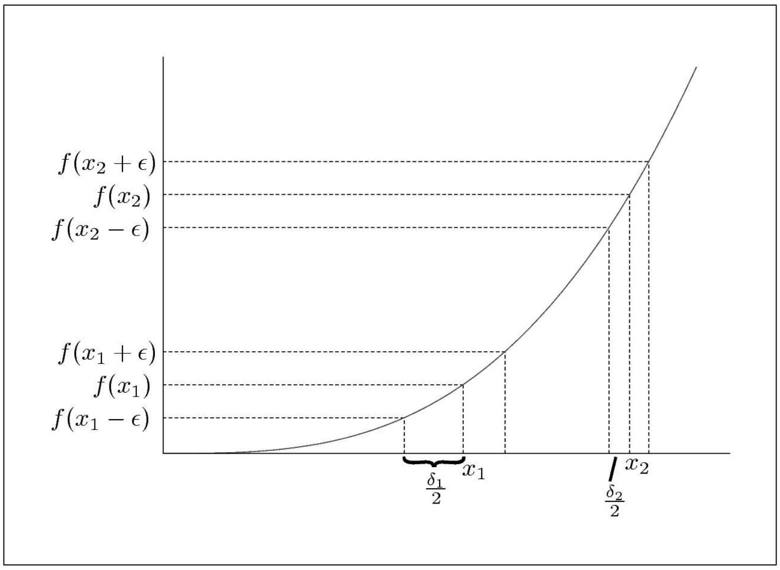



Abbildung 7.5.: Während $\varepsilon$ konstant bleibt werden verschiedene Werte für $x$ ($x_1$, $x_2$) gewählt; deutlich sichtbar: $\delta_1$ muss wesentlich größer gewählt werden als $\delta_2$.

## 7.8. Gleichmäßige Stetigkeit

**Definition 7.29.** $f: D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf $D$, wenn gilt:

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,z\in D:\ \Big[|x-z|<\delta\ \Rightarrow\ \big|f(x)-f(z)\big|<\varepsilon\Big]}$$

($\delta$ nur von $\varepsilon$ abhängig)

Klar: $f$ gleichmäßig stetig auf $D$ $\Rightarrow$ $f$ stetig auf $D$. Die Umkehrung ist i.a. falsch.

**Satz 7.30.** Sei $D$ *kompakt* und $f$ *stetig* auf $D$. Dann ist $f$ auch *gleichmäßig stetig* auf $D$.

**Beweis:** *Annahme:* $f$ sei nicht gleichmäßig stetig. Dann existiert ein $\varepsilon>0$ derart, dass für alle $\delta>0$ folgendes *nicht* gilt:

$$\forall z,x\in D\quad \Big[|x-z|<\delta\ \Rightarrow\ \big|f(x)-f(z)\big|<\varepsilon\Big]$$

Insbesondere für $\delta := \frac{1}{n}$ mit $n\in\mathbb{N}$: Es gibt $z_n, x_n \in D$ mit $|x_n-z_n|<\frac{1}{n}$, aber $|f(x_n)-f(z_n)|\geq\varepsilon$.

Da $D$ kompakt, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})$ von $(x_n)$ mit $x_{n_k} \to x_0 \in D$ für $k \to \infty$.

Wegen $|x_{n_k} - z_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \to 0$ für $k \to \infty$ geht also auch $z_{n_k} \to x_0$.

Da $f$ stetig in $x_0$: $f(x_{n_k}) \to f(x_0), f(z_{n_k}) \to f(x_0)$ für $k \to \infty$.

$\Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(z_{n_k})| \to 0$ ↯. □

**Beispiel 7.31.** $f = x^2, D = [0,1]$.

$$\big|f(x) - f(z)\big| = \big|x^2 - z^2\big| = |x+z| \cdot |x-z| \leq 2|x-z|$$

Also: Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$.

## 7.9. Lipschitz–Stetigkeit

**Definition 7.32.** $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-*stetig* auf $D$, wenn ein $L \geq 0$ existiert mit

$$\boxed{\forall x, z \in D: \quad \big|f(x) - f(z)\big| \leq L|x-z|}$$

(d.h. „Sekantensteigung von $f$ ist immer $\leq L$“)

Klar: $f$ Lipschitz-stetig auf $D \Rightarrow f$ gleichmäßig stetig auf $D$ (zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$). Die Umkehrung ist i.a. falsch.

**Beispiel 7.33.** $D = [0,1], f(x) := \sqrt{x}$.

$f$ ist stetig und $D$ kompakt, also ist $f$ nach obigem Satz auch gleichmäßig stetig. $f$ ist aber nicht Lipschitz–stetig:

*Annahme:* Es existiert ein $L \geq 0$ mit

$$\forall x, z \in D: \quad \big|\sqrt{x} - \sqrt{z}\big| \leq L|x-z|$$

Speziell für $z := 0$:

$$\forall x \in (0,1]: \sqrt{x} \leq Lx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{L} \leq \sqrt{x}$$

↯ da $\sqrt{x} \to 0$ für $x \to 0$.

## 7.10. Zusammenfassung

$f$ Lipschitz-stetig $\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow f$ stetig.

Die Umkehrungen sind i.a. falsch; Ausnahme vgl. obiger Satz.

# 8. Funktionenfolgen und –reihen

Stets in diesem Abschnitt: $D \subset \mathbb{R}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Folge* von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$.

$s_n := f_1 + \cdots + f_n : D \to \mathbb{R}$. $(s_n) =: \sum f_n$ heißt *Funktionenreihe*.

## 8.1. Punktweise Konvergenz

**Definition 8.1.** Die Funktionenfolge $(f_n)$ bzw. -reihe $\sum f_n$ heißt *punktweise konvergent* auf $D$, wenn $\forall x \in D$ $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent bzw. $\forall x \in D$ $\sum f_n(x)$ konvergent.

In diesem Fall heißt $f : D \to \mathbb{R}$ oder $s : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall x \in D \quad f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

bzw.

$$\forall x \in D \quad s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

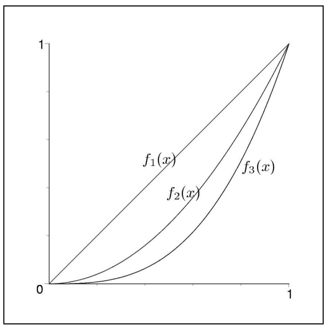
die *Grenzfunktion* bzw. *Summenfunktion*.

**Beispiel 8.2.**

(1) $D = [0,1]$, $f_n(x) := x^n$. Dann

$$f_n(x) \to \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{array} \right\} =: f(x)$$

Also: $f_n$ konvergiert punktweise gegen $f$.




(2) Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. $D = (x_0 - r, x_0 + r)$.

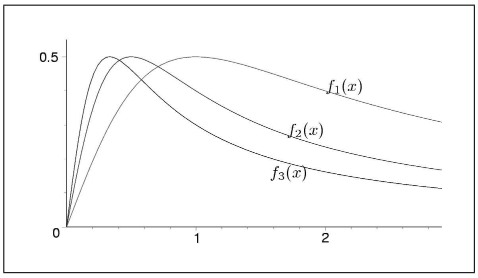
$$f_n(x) := a_n(x-x_0)^n, \quad s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

Dann konvergiert $\sum f_n$ auf $D$ punktweise gegen $s$.

(3) $D = [0, \infty)$,

$$f_n(x) = \frac{n \cdot x}{1 + n^2 x^2} = \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2} + x^2} \to 0$$

für $n \to \infty$ für alle $x \in D$.
Also: $(f_n)$ konvergiert auf $D$ punktweise gegen $f \equiv 0$.
**Beachte:** $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$.




Punktweise Konvergenz von $f_n$ gegen $f$ bedeutet:

$$\forall x \in D \quad f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in D: \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

($n_0$ hängt ab von $\varepsilon$ *und von* $x$)

## 8.2. Gleichmäßige Konvergenz

**Definition 8.3.** $(f_n)$ bzw. $\sum f_n$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen $f$ bzw. $s$ auf $D$, wenn

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in D: \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon}$$

($n_0$ hängt *nur* noch von $\varepsilon$ ab.)

Anschaulich bedeutet gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)$ gegen $f$:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0$: Der Graph von $f_n$ bleibt im $\varepsilon$–Schlauch um den Graphen von $f$ (vergleiche auch Abbildung 8.1).

Klar: Gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ Punktweise Konvergenz. Die Umkehrung ist i.a. falsch

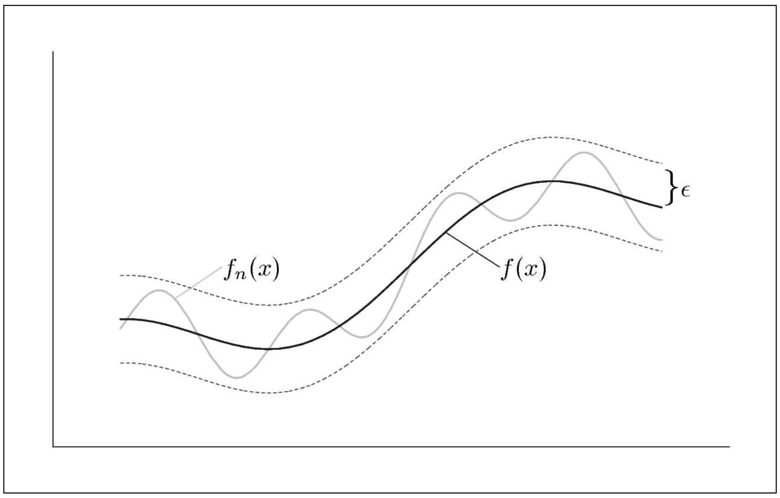



Abbildung 8.1.: Anschauliche Darstellung der gleichmäßigen Konvergenz

**Beispiel 8.4.**

(1) $D = [0, 1], f_n(x) = x^n$

$f_n$ konvergiert punktweise gegen $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in [0,1) \\ 1 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$.

Aber: $(f_n)$ konvergiert *nicht* gleichmäßig gegen $f$, denn

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

d.h. es gibt kein $n_0$ mit

$$\forall n \geq n_0 \; \forall x \in D \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon := \frac{1}{2}$$

**Beachte:** Alle $f_n \in C[0, 1]$, aber $f \notin C[0, 1]$.

*Aber:*

(2) Sei $\alpha \in (0, 1)$, $D_\alpha := [0, \alpha]$ und $f_n(x) := x^n$.

Klar nach (1): $(f_n)$ konvergiert auf $D_\alpha$ punktweise gegen $f : x \mapsto 0$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in D_\alpha$ gilt:

$$\big|f_n(x) - \underbrace{f(x)}_{=0}\big| = \left|f_n(x)\right| = x^n \leq \alpha^n$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0 : \; \alpha^n < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \quad \forall n \geq n_0 \; \forall x \in D_\alpha : \; \left|f_n(x) - f(x)\right| = x^n \leq \alpha^n < \varepsilon$$

Also: $(f_n)$ konvergiert auf $D_\alpha$ gleichmäßig gegen $f$.

(3) $D = [0, \infty), f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. $(f_n)$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen 0, da $f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Es gibt kein $n_0$ mit

$$\forall n \geq n_0 \; \forall x \in D \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon := \frac{1}{2}$$

**Satz 8.5.**

(1) Sei $(f_n)$ Funktionenfolge auf $D$ und $f : D \to \mathbb{R}$.

Es gebe eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ und es gebe ein $m \in \mathbb{N}$ mit:

$$\forall n \geq m \; \forall x \in D : \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \alpha_n$$

Dann konvergiert $(f_n)$ gleichmäßig auf $D$ gegen $f$.

(2) **Majorantenkriterium von** Weierstrass:

Es gebe eine Folge $(c_n)$ in $\mathbb{R}$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq m \; \forall x \in D : \quad \left|f_n(x)\right| \leq c_n$$

und es sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent. Dann konvergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf $D$.

**Beweis:**

(1) Sei $\varepsilon > 0$, wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq m$ und $\forall n \geq n_0 \;\; \alpha_n < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \; \forall x \in D \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leq \alpha_n < \varepsilon$$

(2) $s_n := f_1 + \cdots + f_n$.

$$\forall x \in D \; \forall n \geq m \quad \big|f_n(x)\big| \leq c_n$$

Aus dem Majorantenkriterium für reelle Zahlen folgt:

$$\sum f_n \text{ konvergiert punktweise gegen } s(x) := \sum f_n(x).$$

Für $n \geq m$ gilt nun:

$$\forall x \in D \quad \big|s_n(x) - s(x)\big| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \big|f_k(x)\big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k =: \alpha_n$$

Da $\sum c_k$ konvergiert, folgt: $\alpha_n \to 0$ für $n \to \infty$.

$\Rightarrow s_n$ konvergiert gleichmäßig auf $D$ gegen $s$, d.h. $\sum f_n$ konvergiert gleichmäßig auf $D$ gegen $s$.

□

**Satz 8.6.** $(f_n)$ konvergiere auf $D$ gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$.

(1) Sind alle $f_n$ in $x_0 \in D$ stetig, so ist auch $f$ in $x_0$ stetig.

(2) Gilt $f_n \in C(D)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $f \in C(D)$.

**Beweis:**

(1) Für $x \in D, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(x_0)\big| &= \big|\big(f(x) - f_n(x)\big) + \big(f_n(x) - f_n(x_0)\big) + \big(f_n(x_0) - f(x_0)\big)\big| \\ &\leq \big|f(x) - f_n(x)\big| + \big|f_n(x) - f_n(x_0)\big| + \big|f_n(x_0) - f(x_0)\big|\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann:

$$\exists m \in \mathbb{N} \; \forall y \in D : \; \big|f_m(y) - f(y)\big| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Also ist $|f(x) - f(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_m(x) - f_m(x_0)|$.

$f_m$ ist stetig in $x_0$ also existiert ein $\delta > 0$ mit $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Also: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.

$\Rightarrow \quad f$ stetig in $x_0$.

(2) Folgt direkt aus (1).

□

**Bemerkung 8.7.** Konvergiert $(f_n)$ auf $D$ punktweise gegen $f : D \to \mathbb{R}$ und sind alle $f_n$ stetig auf $D$, $f$ aber nicht, so kann die Konvergenz (nach 8.6) nicht gleichmäßig sein.

Vergleiche Beispiel (1) $\big[f_n(x) := x^n$ auf $D = [0,1]\,\big]$:

$f_n \in C(D)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $f \notin C(D) \quad \Rightarrow \quad (f_n)$ konvergiert nicht gleichmäßig (wie gezeigt).

**Bemerkung 8.8.** Die Vorraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in vorigem Satz. Außerdem sei $x_0$ Häufungspunkt von $D$.

Dann:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ und } \lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Also:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) &= \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)\end{aligned}$$

Die Vertauschung von Grenzwertbildung ist i.a. nicht möglich! Denn (vergleiche Beispiel (1)):

$$\lim_{x\to 1-}\left(\lim_{n\to\infty} x^n\right) = \lim_{x\to 1-} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1-} x^n\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Hier unter der Vorrausetzung gleichmäßiger Konvergenz jedoch schon.

## 8.3. Potenzreihen

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n =: f(x)$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. $D := (-r, r)$.

Dann $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ für jedes $x_0 \in D$ (vergl. Beispiel 6.6 (4)).

Also

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\underbrace{\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)}_{=f(x)} &= \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k\right)}_{=f(x_0)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\end{aligned}$$

*Frage:* Konvergiert die Potenzreihe auf $D$ gleichmäßig? (da sich ja die Grenzwerte vertauschen lassen)

*Antwort:* Im allgemeinen nein, denn:

**Beispiel 8.9.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $D = (-1, 1)$, $s_n(x) := 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \to \frac{1}{1-x}$ $(n \to \infty)$.

Sei $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Setze $\varepsilon = 1$. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $x \in D$

$$\begin{aligned}\left|s_m(x) - f(x)\right| &= \left|\frac{1-x^{m+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right|\\ &= \frac{|x|^{m+1}}{1-x} \xrightarrow{x\to -1} \infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \exists x_0 \in D$ mit $\left|s_n(x_0) - f(x_0)\right| \geq 1 = \varepsilon$.

*Aber:*

**Satz 8.10.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ und $D = (-r, r)$.

Ist $[a, b] \subset D$ ein *kompaktes* Intervall, so konvergiert die Potenzreihe auf $[a, b]$ *gleichmäßig*.

**Beweis:** Setze $\varrho := \max\{|a|, |b|\}$. Dann ist $[a, b] \subset [-\varrho, \varrho] \subset D$.

Sei $f_n(x) := a_n x^n, x \in D$. Für jedes $x \in [-\varrho, \varrho], n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\big|f_n(x)\big| \le |a_n| \cdot |x|^n \le |a_n| \cdot \varrho^n =: c_n$$

Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ absolut, d.h. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert.

Die Behauptung folgt dann mit Satz 8.5. $\square$

**Bemerkung 8.11.** Wir erhalten so einen Beweis für Satz 7.6.

Mit den Bezeichnungen von Satz 8.10 sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in D$.

*Behauptung:* $f \in C(D)$

**Beweis:** Sei $x_0 \in D$. Wähle $a < b$ mit $[a, b] \subset D$ und $a < x_0 < b$.

Nach Satz 8.10 konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gleichmäßig auf $[a, b]$.

Nach Satz 8.6 ist $f \in C[a, b]$, insbesondere ist $f$ stetig in $x_0$.

Da wir $x_0$ beliebig gewählt haben, folgt, dass $f$ stetig auf ganz $D$ ist. $\square$

**Satz 8.12** (Identitätssatz für Potenzreihen)**.**

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ seien Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 > 0, r_2 > 0$.

Setze $r := \min\{r_1, r_2\}$ und $D := (-r, r)$.

Definiere die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ und } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $D \setminus \{0\}$ und $f(x_k) = g(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt: $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Beweis:** *Annahme:* Es gibt unter den genannten Vorraussetzungen ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq b_n$.

Setze $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$ und $h : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - g(x)$.

Weiter sei $c_n := a_n - b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist $c_0 = \cdots = c_{n_0-1} = 0$.

Dann gilt für jedes $x \in D$:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n x^n$$

also

$$\varphi(x) := \frac{h(x)}{x^{n_0}} = \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n x^{n-n_0} \underset{k=n-n_0}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+n_0} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+n_0} x^n$$

$\varphi$ ist eine Potenzreihe, die für jedes $x \in D$ konvergiert $\Rightarrow$ $\varphi$ hat den Konvergenzradius $r_\varphi \geq r$.

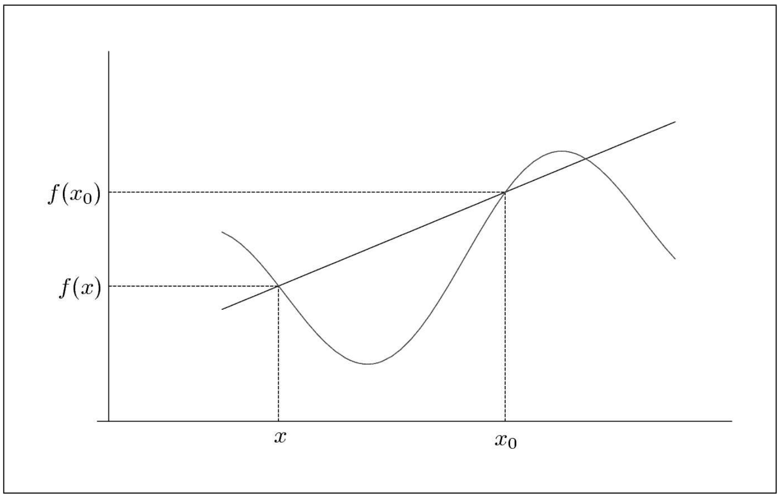
$\underset{7.6}{\Rightarrow}$ $\varphi$ stetig in 0, d.h. $\varphi(x_k) \to \varphi(0) = c_{n_0} = a_{n_0} - b_{n_0} \neq 0$.

Andererseits: $\varphi(x_k) = \frac{h(x_k)}{x_k^{n_0}} = \frac{f(x_k)-g(x_k)}{x_k^{n_0}} = 0 \to 0$ $\lightning$ $\square$

# 9. Differentialrechnung

Stets in diesem Abschnit: $I \subset \mathbb{R}$ sei ein (nicht–einpunktiges) *Intervall* ($I = \mathbb{R}$ zugelassen), $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

*Idee:* „Approximiere“ $f$ „in der Nähe von“ $x_0 \in \mathbb{N}$ durch eine Gerade.




Steigung der Geraden durch die Punkte $\big(x_0, f(x_0)\big)$ und $\big(x, f(x)\big)$: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \sim f(x_0) + a(x - x_0) \quad \big[x \text{ nahe } x_0\big]$$

**Definition 9.1.** $f : I \to \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in \mathbb{R}$ *differenzierbar* (diff'bar)

$$:\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert und ist } \neq \pm\infty$$

(Beachte: $x_0$ ist Häufungspunkt von $I$)

$$\left(\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existiert und ist } \in \mathbb{R}\right)$$

Anschaulich ist der $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, *falls er existiert*, die „Steigung der Tangenten an dem Graphen von $f$ im Punkt $x_0$“.

*Falls* $f$ in $x_0$ differenzierbar ist, so heißt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

die (erste) *Ableitung* von $f$ im Punkt $x_0$.

Falls $f$ in *jedem* $x_0 \in I$ differenzierbar ist, so heißt $f$ *differenzierbar auf* $I$. In diesem Fall wird durch $I \to \mathbb{R}$, $x_0 \mapsto f'(x_0)$ eine Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ definiert, die (erste) *Ableitung von* $f$ *auf* $I$.

**Beispiel 9.2.**

(1) $I$ sei beliebig, $\forall x \in I\ f(x) := c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ fest.

Dann:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0$$

$\Rightarrow$ $f$ differenzierbar auf $I$ und $\forall x \in I\ f'(x) = 0$.

(2) $I = \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) := |x|$.

Wähle $x_0 = 0$, dann für $x \neq x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Also

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 1$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existiert nicht}$$

$\Rightarrow$ $f$ ist in 0 *nicht differenzierbar.*

*Beachte:* $f$ ist in 0 *stetig.*

(3) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ fest.

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}\right)}{x-x_0} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1} \\ &\xrightarrow{x\to x_0} n \cdot x_0^{n-1}\end{aligned}$$

Also: $f$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $\forall x \in \mathbb{R}:\ f'(x) = nx^{n-1}$.

(4) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = E(x) = e^x$; sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wie bereits gezeigt:

$$\frac{E(x_0+h)-E(x_0)}{h} \xrightarrow{h\to 0} E(x_0) = e^{x_0}$$

$\Rightarrow$ $E$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $E' = E$.

**Satz 9.3.** Ist $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar, so ist $f$ in $x_0$ stetig.

**Beweis:**

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\xrightarrow{x\to x_0} f'(x)} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} \to f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x\to x_0} f(x_0)$$

$\Rightarrow$ $f$ ist in $x_0$ stetig. □

## 9.1. Differentiationsregeln

**Satz 9.4** (Differentiationsregeln)**.** $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar in $x_0 \in I$.

(1) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ in $x_0$ differenzierbar, und

$$\boxed{(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)}$$

(2) $f \cdot g$ ist in $x_0$ differenzierbar, und

$$\boxed{(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) \, + \, f(x_0) \cdot g'(x_0)}$$

(3) Ist $g(x_0) \neq 0$, so existiert ein (nicht einpunktiges) Intervall $J \subset I$ mit $\forall x \in J \quad g(x) \neq 0$ und $\frac{f}{g} : J \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0$ mit

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}}$$

**Beweis:**

(1) selbst

(2)

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot g(x) + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)}$$

$\Rightarrow$ Behauptung.

(3) Nach 9.3 ist $g$ stetig in $x_0$. Daraus folgt die ie Aussage über $J$.

$$\frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left[ \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} g(x_0) - f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \right]$$

$\Rightarrow$ Behauptung.

$\square$

**Beispiel 9.5.** Sei $I = (0, \infty)$, $h(x) = \frac{e^x}{x} = \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) = e^x$ und $g(x) = x$.

Dann ist $h$ differenzierbar auf $I$ und

$$h'(x) = \frac{e^x x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$$

**Satz 9.6** (Kettenregel)**.** Seien $I, J$ nicht einpunktige Intervalle. $g : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $x_0 \in I$, es gelte $g(I) \subset J$.

$f : J \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $y_0 := g(x_0) \in J$.

Dann ist $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0$, und

$$\boxed{(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0)}$$

**Beweis:**

$$\tilde{f}(y) := \begin{cases} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} & \text{für } y \neq y_0 \\ f'(y_0) & \text{für } y = y_0 \end{cases}$$

Da $f$ differenzierbar in $y_0$ ist, gilt $\tilde{f}(y) \to f'(y_0) = \tilde{f}(y_0)$ für $y \to y_0$. (d.h. $\tilde{f}$ stetig in $y_0$)

Nach 9.3 ist ferner $g$ stetig in $x_0$, also

$$g(x) \xrightarrow{x \to x_0} g(x_0) = y_0$$

$\tilde{f}$ stetig in $y_0$

$$\Rightarrow \tilde{f}\big(g(x)\big) \xrightarrow{x \to x_0} \tilde{f}(y_0) = f'(y_0)$$

Ferner $\forall y \in J \;\; f(y) - f(y_0) = (y - y_0) \cdot \tilde{f}(y)$.

$$\Rightarrow \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{x - x_0} = \frac{\big(g(x) - y_0\big)\tilde{f}\big(g(x)\big)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \cdot \underbrace{\tilde{f}(g(x))}_{\to f'(x_0)}$$

□

**Beispiel 9.7.** Sei $a > 0$ und $h(x) := a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $h(x) = f(g(x))$ mit

$$f(x) := e^x, \quad g(x) := x \cdot \log a$$

$f$ und $g$ sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, $f'(x) = e^x,\; g'(x) = \log a$. Nach 9.6 ist $h$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x \cdot \log a} \cdot \log a = a^x \cdot \log a$$

## 9.2. Umkehrfunktion

*Frage:* $f$ differenzierbar, $f^{-1}$ existiert: Ist dann auch $f^{-1}$ differenzierbar?

*Antwort:* I.a. nein.

**Beispiel 9.8.** $I = [0, \infty), f(x) = x^2$ (also $f'(x) = 2x, f'(0) = 0$). $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$; in $x_0 = 0$ gilt:

$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \to x_0 = 0} \infty$$

$\Rightarrow \;\; f^{-1}$ in $x_0$ *nicht* differenzierbar.

(Das liegt an $f'(0) = 0$ und natürlich $f(0) = 0, f^{-1}(0) = 0$)

**Satz 9.9.** Sei $I$ ein Intervall (nicht einpunktig), $f \in C(I)$ und $f$ *streng monoton.* ($\Rightarrow$ $f^{-1}$ existiert).

Ist $f$ differenzierbar in $x_0 \in I$ *und* $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch $f^{-1} : f(I) \to I$ differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$ und

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \left[= \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}\right]}$$

(*Beachte:* $f(I)$ ist Intervall, da Bilder von stetigen Funktionen Intervalle sind. Und $I$ ist nicht einpunktig, da $f$ streng monoton.)

**Beweis:** Sei $(y_n)$ eine Folge in $f(I)$ mit $y_n \to y_0$ und $y_n \neq y_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Setze $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n := f^{-1}(y_n)$.

$\Rightarrow$ $f^{-1}$ stetig (in $y_0$).

Also: $x_n = f^{-1}(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} f^{-1}(y_0) = x_0$.

$$\Rightarrow \quad \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

**Beispiel 9.10.**

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = e^x$. Bekannt: $f^{-1} = \log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f'(x) = e^x$.

Dann $\forall y \in (0,\infty) :\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ mit $y = f(x)$.

d.h. $(\log)'(y) = \frac{1}{e^x}$ mit $y = e^x$, d.h.

$$\forall y \in (0,\infty) \quad (\log)'(y) = \frac{1}{y}$$

(2) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\forall x > 0\ \ f(x) := x^\alpha = e^{\alpha \cdot \log x}$.

$$\Rightarrow \quad \forall x > 0 \quad f(x) = g(h(x)) \text{ mit } g(x) = e^x, \quad h(x) = \alpha \log x \Rightarrow h'(x) = \tfrac{\alpha}{x}$$

$\Rightarrow$ $f$ differenzierbar auf $(0,\infty)$ und

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x) = e^{\alpha \log x} \cdot \tfrac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

z.B.

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Beispiel 9.11.**

(1) $f(t) := \log(1+t),\ \ t > -1$

$f$ ist auf $(-1,\infty)$ differenzierbar und $f'(t) = \frac{1}{1+t}$.

Es ist

$$\frac{\log(1+t)}{t} = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \xrightarrow{t\to 0} f'(0) = 1$$

Also: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$.

(2) *Behauptung:* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.

**Beweis:** Klar für $a = 0$.

Sei $a \neq 0$. Nach (1) gilt $\frac{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 1$.

Also $x \cdot \log\left(1 + \frac{a}{x}\right) \xrightarrow{x\to\infty} a$.

$\Rightarrow \quad \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^{x\cdot\log\left(1+\frac{a}{x}\right)} \xrightarrow{x\to\infty} e^a$. □

## 9.3. Extrempunkte

**Definition 9.12.** Sei $M \subset \mathbb{R}$.

$x_0 \in M$ heißt *innerer Punkt* von $M$, falls ein $\delta > 0$ existiert mit $U_\delta(x_0) \subset M$.

D.h.: Ist $M = [a, b]$ oder $M = [a, b)$ oder $M = (a, b]$ oder $M = (a, b)$, so gilt:

$$x_0 \text{ ist innerer Punkt von } M \;\Leftrightarrow\; x_0 \in (a, b).$$

**Beispiel 9.13.** $M = \mathbb{Q}$: $M$ hat keine inneren Punkte, denn für jedes $x_0 \in \mathbb{Q}$ und jedes $\delta > 0$ enthält $U_\delta(x_0)$ irrationale Punkte, also $U_\delta(x_0) \not\subset M$.

**Definition 9.14.** Sei $D \subset \mathbb{R}$. $f : D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein *relatives Maximum*

$$:\Leftrightarrow \quad \exists \delta > 0 \; \forall x \in D \cap U_\delta(x_0) \quad f(x) \leq f(x_0)$$

bzw. hat ein *relatives Minimum*

$$:\Leftrightarrow \quad \exists \delta > 0 \; \forall x \in D \cap U_\delta(x_0) \quad f(x) \geq f(x_0)$$

$x_0$ ist ein *relatives Extremum*, wenn $f$ in $x_0$ ein relatives Maximum oder ein relatives Minimum hat.

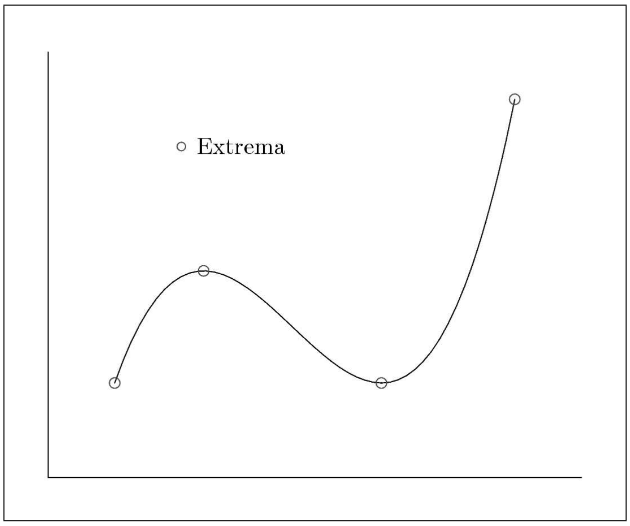



Abbildung 9.1.: Funktion mit eingezeichneten relativen Extrema

**Satz 9.15.** $I$ Intervall, nicht einpunktig, $f : I \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in I$ ein relatives Extremum. Ferner sei $f$ differenzierbar in $x_0$, und $x_0$ sei innerer Punkt von $I$. Dann gilt:

$$f'(x_0) = 0$$

**Beweis:** $f$ habe in $x_0$ ein relatives *Maximum.* (Minimum analog)

Da $x_0$ innerer Punkt von $I$ gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit $U_{\delta_1}(x_0) \subset I$.

Da $f$ in $x_0$ relatives Maximum hat,

$$\exists \delta_2 \; \forall x \in I \cap U_{\delta_2}(x_0) \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Also für $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$:

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Also für $x \in U_\delta(x_0), x \neq x_0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x > x_0 \\ \geq 0 & \text{für } x < x_0 \end{cases}$$

Da $f$ differenzierbar in $x_0$, existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ und ist gleich $\lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (linksseitiger Limes) und gleich $\lim\limits_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (rechtsseitiger Limes).

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$\square$

**Warnungen:**

(1) Die Umkehrung des Satzes ist falsch!
**Beispiel 9.16.** $\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2, f'(0) = 0$, aber $f$ hat in 0 weder relatives Maximum noch relatives Minimum.

(2) Die Voraussetzung „$x_0$ innerer Punkt von $I$“ ist wesentlich.
**Beispiel 9.17.** $I = [0, 1], \forall x \in I \;\; f(x) := x$. $f$ hat in $x_0 = 1$ relatives Maximum, aber $f'(1) = 1 \neq 0$. Allerdings ist $x_0$ auch kein innerer Punkt von $I$.

Vergleiche hierzu auch die beiden „Randextrema“ in Abbildung 9.1.

## 9.4. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

**Satz 9.18** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.**

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $(a, b)$.

Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\boxed{f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

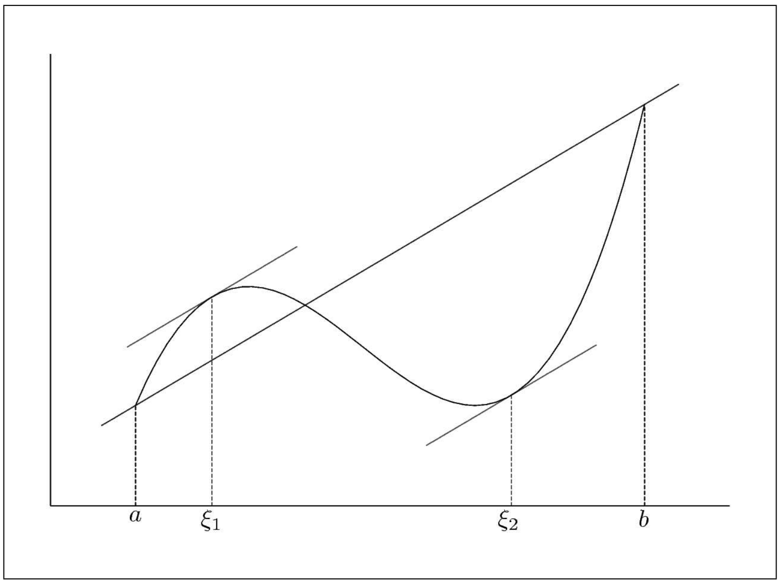



Abbildung 9.2.: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

**Beweis:**

$$\forall x \in [a,b]: \ g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

Dann: $g$ stetig auf $[a,b]$, differenzierbar auf $(a,b)$.

Ferner ist $g(a) = 0$, $g(b) = 0$. Da stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall immer Minimum und Maximum annehmen, existieren $s, t \in [a,b]$ mit

$$\forall x \in [a,b]: \ g(s) \leq g(x) \leq g(t)$$

*Falls* $s \in \{a,b\}$ und außerdem $t \in \{a,b\}$ ist, so folgt (wegen $g(a) = g(b) = 0$): $g(s) = g(t) = 0$ und damit $g \equiv 0$

$\Rightarrow \ g'(\xi) = 0$ für jedes $\xi \in (a,b)$.

*Falls* $s \in (a,b)$ oder $t \in (a,b)$, so ist wenigstens einer von beiden *innerer Punkt* von $(a,b)$ und daher, da $g$ in $t$ ein relatives Maximum und in $s$ ein relatives Minimum hat:

$\Rightarrow \ g'(t) = 0$ oder $g'(s) = 0$.

Also *in jedem Fall*:

$$\exists \xi \in (a,b): \ g'(\xi) = 0$$

Es gilt ferner

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\Rightarrow$ Behauptung. $\square$

**Anwendung:**

$$\left|f(b) - f(a)\right| = \left|f'(\xi)\right| \cdot |b - a| \leq c \cdot |b - a| \quad \text{falls } |f'(\xi)| \leq c$$

**Korollar 9.19.** $I$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf $I$. Dann gilt:
$f$ ist *konstant* auf $I \quad \Leftrightarrow \quad f' = 0$ auf $I$.

**Beweis:**

„$\Rightarrow$“ ist klar.

„$\Leftarrow$“ Seien $a, b \in I$ und $a < b$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist konstant}$$

□

## 9.5. Anwendungen:

**Korollar 9.20.** Es existiert genau eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
(1) $f$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.
(2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x)$.
(3) $f(0) = 1$.
nämlich $f(x) = e^x$.

**Beweis:** Klar: $f(x) = e^x$ *hat* die Eingeschaften (1), (2), (3).

Zur Eindeutigkeit:

Sei $f$ Funktion mit obigen Eigenschaften. Setze

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) := \frac{f(x)}{e^x}$$

Dann

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi'(x) = \frac{\overbrace{f'(x)}^{=f(x)} e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = 0$$

Nach 9.19 ist $\Phi$ konstant, d.h.

$$\exists c \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) = c$$

Ferner $\Phi(0) = \frac{f(0)}{e^0} = f(0) = 1$.

$$\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^x$$

□

**Korollar 9.21.**

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

(Erinnerung: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.)

**Beweis:** Setze $\forall t \in (-1, \infty)$ $f(t) := \log(1+t)$. Dann $f'(t) = \frac{1}{1+t} \cdot 1$.

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(0) = 1$$

Daher gilt für alle $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\log(1 + \frac{a}{x})}{\frac{a}{x}}}_{=\frac{1}{a}\log(1+\frac{a}{x})^x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \log\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = a$$

Da $E$ stetig (in $a$):

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} e^{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)^x} = e^a$$

$\Rightarrow$ Behauptung für $a \neq 0$. ($a = 0$ Behauptung trivial.) $\square$

**Korollar 9.22** (Folgerung aus dem Mittelwertsatz)**.**

(1) Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $f' = g'$ auf $I$, so existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in I \quad f(x) = g(x) + c$$

(2) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

- Falls $f' > 0$ auf $I$, so ist $f$ *streng monoton wachsend.*
- Falls $f' < 0$ auf $I$, so ist $f$ *streng monoton fallend.*
- Falls $f' \geq 0$ auf $I$, so ist $f$ *monoton wachsend.*
- Falls $f' \leq 0$ auf $I$, so ist $f$ *monoton fallend.*

**Beweis:**

(1) Setze $h := f - g$, dann ist $h' = f' - g' \equiv 0$ auf $I$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}\, \forall x \in I \quad h(x) = f(x) - g(x) = c$$

(2) Sei $f' > 0$ auf $I$. Seien $a, b \in I$ mit $a < b$. Dann

$$f(b) - f(a) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(b-a)}_{>0} > 0 \text{ nach Mittelwertsatz}$$

(es *existiert* ein $\xi$, derart dass ...)

$\Rightarrow$ $f(a) < f(b)$ $\Rightarrow$ $f$ streng monoton wachsend. (Rest analog).

$\square$

**Bemerkung 9.23.** Ist $f$ auf $I$ differenzierbar und $f$ monoton wachsend [fallend], so ist $f' \geq 0$ $\left[f' \leq 0\right]$ auf $I$.

*Aber:* Ist $f$ auf $I$ differenzierbar und $f$ *streng* monoton wachsend, so folgt *nicht* $f' > 0$ (betrachte $f(x) = x^3$).

**Satz 9.24** (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)**.**

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien beide stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $(a, b)$.

Ferner gelte $\forall x \in (a, b)$ $g'(x) \neq 0$. Dann gilt:

(1) $g(a) \neq g(b)$

(2) $\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

**Beweis:**

(1) Wäre $g(a) = g(b)$, dann gilt nach dem Mittelwertsatz:

$$\exists \eta \in (a, b) \quad \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(\eta) \neq 0$$

(2) Setze:

$$\forall x \in [a, b] \quad h(x) := \left[f(b) - f(a)\right]g(x) - \left[g(b) - g(a)\right]f(x)$$

Dann $h \in C[a, b]$, $h$ differenzierbar auf $(a, b)$, und

$$h(a) = h(b) = \big(f(b)g(a) - g(b)f(a)\big)$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert also ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$h'(\xi) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = 0$$

Es ist aber

$$0 = h'(\xi) = \left[f(b) - f(a)\right]g'(\xi) - \left[g(b) - g(a)\right]f'(\xi)$$

$\Rightarrow$ Behauptung.

$\square$

## 9.6. Die Regeln von DE L'HOSPITAL

**Satz 9.25** (Regeln von DE L'HOSPITAL)**.**

Sei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf $(a, b)$ und sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Weiterhin sei $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

(1) Ist $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, so gilt $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \to a} L$.

(2) Ist $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, so gilt $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \to a} L$.

Entsprechendes gilt für die Bewegung $x \to b$.

**Beweis:** Wir zeigen nur (1) für den Fall $a \in \mathbb{R}$.

Setze $f(a) := 0$, $g(a) := 0$. Dann sind $f, g$ stetig auf $[a, b)$.

Sei nun $x \in (a, b)$. Dann $g(x) = g(x) - g(a) = g'(\xi)(x - a) \neq 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

mit einem $\xi = \xi(x) \in (a, x)$.

Nach Voraussetzung gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'\big(\xi(x)\big)}{g'\big(\xi(x)\big)} = L$$

da $\lim\limits_{x \to a} \xi(x) = a$.

Also nach Obigem:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$\square$

**Beispiel 9.26.**

(1) Seien $a, b > 0$. Wir bestimmen $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$.

Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} \underbrace{(a^x - b^x)}_{=:f(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{x}_{=:g(x)} = 0$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(\log a)a^x - (\log b)b^x}{1} \xrightarrow{x \to 0} \log a - \log b$$

Nach l'Hospital:

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \log a - \log b$$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to 0}(x \log x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0}(-x) = 0$

(4) $\lim\limits_{x \to 0+} x^x = \lim\limits_{x \to 0+} e^{x \log x} \underset{(3)}{=} e^0 = 1$

**Bemerkung 9.27.** Es kann passieren, dass auch $\frac{f'}{g'}$ *wieder* vom Typ $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ ist. Setze dann $\tilde{f} := f'$ und $\tilde{g} := g'$ und versuche, den Satz von de l'Hospital für $\tilde{f}, \tilde{g}$ (statt $f, g$) anzuwenden.

$\rightsquigarrow$ sukzessiv forsetzen.

**Beispiel:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Es kann auch passieren, dass *immer wieder* obige Typen auftreten. Dann ist diese Regel nicht anwendbar und der Limes muss auf andere Art bestimmt werden.

**Satz 9.28.** Es sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ und $I = (-r, r)$.

(1) Die „gliedweise differenzierte" Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \cdot x^n$$

hat auch den selben Konvergenzradius $r$.

(2) $f$ ist differenzierbar auf $I$ und

$$\forall x \in I \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \cdot x^n$$

(„gliedweises Differenzieren ist bei Potenzreihen im Intervall $(-r, r)$ erlaubt.")

**Beweis:**

(1) Wende Wurzelkriterium an.

$$\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \underbrace{\sqrt[n]{n+1}}_{\to 1} \cdot \left( \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{1+\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$\Rightarrow$ Derselbe Konvergenzradius.

(2) siehe Seite 145.

$\square$

## 9.7. Cosinus und Sinus, die Zahl $\pi$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}}$$

Der Konvergenzradius ist bei beiden Funktionen $\infty$.

Nach Satz 9.28 sind sin und cos auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, und

$$(\sin')(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \cdot \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \cos x$$

Analog $\cos x$:

$$(\cos')(x) = -\sin x$$

**Lemma 9.29.**

(1) $\sin x > x - \frac{x^3}{3!} > 0$ für alle $x \in (0,2)$

(2) $\sin 1 > \frac{5}{6}$

(3) Es gibt genau ein $\xi_0 \in (0,2)$ mit $\cos \xi_0 = 0$. Wir definieren $\pi := 2\xi_0$.

cos hat also in $[0, \frac{\pi}{2}]$ genau eine Nullstelle, nämlich $\frac{\pi}{2}$.

**Beweis:**

(1) $\sin x = \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}_{=\frac{x}{3!}(2\cdot 3 - x^2)} + \underbrace{\left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)}_{=\frac{x^5}{7!}(6\cdot 7 - x^2) > 0} + \cdots$

(2) Verwende (1): $\sin 1 > 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6}$

(3) Mit (2) erhält man

$$\cos(2) = \cos(1+1) = \cos^2(1) - \sin^2(1) = \big(1 - \sin^2(1)\big) - \sin^2(1) = 1 - 2\sin^2(1) < 1 - 2 \cdot \frac{25}{36} < 0$$

Ferner: $\cos(0) = 1 > 0$.

Da cos stetig, folgt aus dem Zwischenwertsatz:

$$\exists \xi_0 \in (0,2) : \ \cos(\xi_0) = 0$$

Ferner gilt $(\cos')(x) = -\sin x < 0$ für $x \in (0,2)$ .

Aus 9.22 folgt: cos ist auf $(0,2)$ streng monoton fallend.

$\Rightarrow$ $\xi_0$ ist *einzige* Nullstelle von cos in $(0,2)$

□

**Satz 9.30** (Eigenschaften)**.**

(1) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

(2) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$
$$\sin(x + \pi) = -\sin x \qquad \cos(x + \pi) = -\cos x$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

(3) Für $x_0 \in [0, \pi]$ gilt: $\cos x_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

(4) $\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow$ es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow$ es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = k\pi$

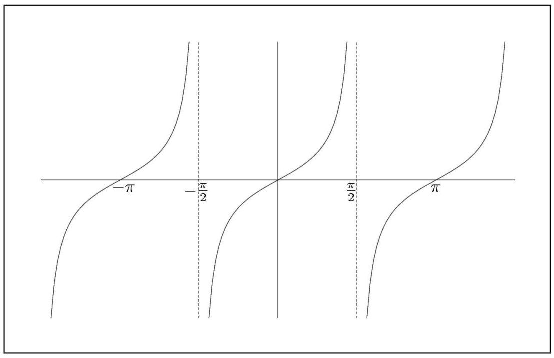



Abbildung 9.3.: Tangens

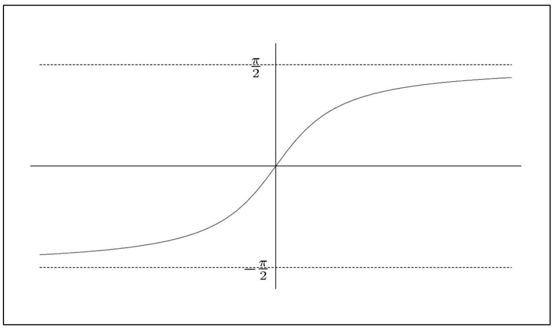



Abbildung 9.4.: Arcustangens

**Beweis:**

(1) $1 = \underbrace{\cos^2 \frac{\pi}{2}}_{=0} + \sin^2 \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad |\sin \frac{\pi}{2}| = 1 \underset{9.29}{\Rightarrow} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$

(2) folgt aus (1) und den Additions-Theoremen

(3)

„$\Leftarrow$“ klar

„$\Rightarrow$“ Sei $\cos x_0 = 0$, $x_0 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \geq \frac{\pi}{2}$

$y_0 := \pi - x_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 \leq \frac{\pi}{2}$ und $\cos y_0 = \cos(-x_0 + \pi) \underset{(2)}{=} -\cos(-x_0) = -\cos x_0 = 0$

$\underset{y_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]}{\Rightarrow} \quad y_0 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

(4) folgt aus (2) und (3)

□

**Definition 9.31** (Tangens)**.**

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \, : \, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Es ist

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$$

Sei $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ , $f(x) := \tan x$.

Dann ist $f$ auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend und $f\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbb{R}$.

Also existiert $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\arctan x := f^{-1}(x) \; , \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{„Arcustangens“}$$

## 9.8. Sonstiges

### 9.8.1. ABELscher Grenzwertsatz

**Satz 9.32** (ABELscher Grenzwertsatz)**.** Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ habe den Konvergenzradius $r>0$; es gelte $r<\infty$. Die Reihe konvergiere in $x_0+r$ bzw. $x_0-r$.

Es sei $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ für $x \in (x_0-r, x_0+r]$ bzw. $x \in [x_0-r, x_0+r)$.

Dann ist $f$ stetig in $x_0+r$ bzw. $x_0-r$.

(hier ohne Beweis)

### 9.8.2. Anwendungen

*Behauptung:*

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \qquad \text{für alle } x \in (-1,1]$$

Insbesondere (für $x=1$): $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

**Beweis:** Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ konvergiert genau für $x \in (-1,1]$.

Sei $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ und $f(x) := \log(1+x)$, $x \in (-1,1]$.

Nach 9.28 ist $g$ differenzierbar auf $(-1,1)$ und

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = f'(x) \qquad \text{für alle } x \in (-1,1)$$

Also existiert nach 9.22 $c \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) + c$, $x \in (-1,1)$.

Da $f(0) = g(0)$ ist $c = 0$ also $f(x) = g(x)$ auf $(-1,1)$.

Also: $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, $x \in (-1,1)$.

Die Behauptung folgt dann aus dem ABELschen Grenzwertsatz mit $x \to 1$. $\square$

Mit einem ähnlichen Beweis zeigt man:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{für alle } x \in [-1,1]$$

Für $x=1$: $\arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

Wegen $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ ist $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, also $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

Somit $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$.

**Definition 9.33.** Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir:

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{„sinus hyperbolicus"}$$

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{„cosinus hyperbolicus"}$$

**Satz 9.34** (Eigenschaften)**.**

(1) $\sinh 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$

(2) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, $\cosh(-x) = \cosh x$

(3) $\sinh' = \cosh$, $\cosh' = \sinh$ auf $\mathbb{R}$

(4) $\sinh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cosh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(5) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $x \in \mathbb{R}$

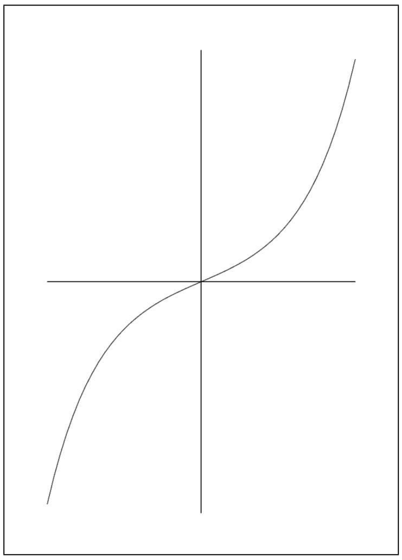


Abbildung 9.5.: Sinus hyperbolicus

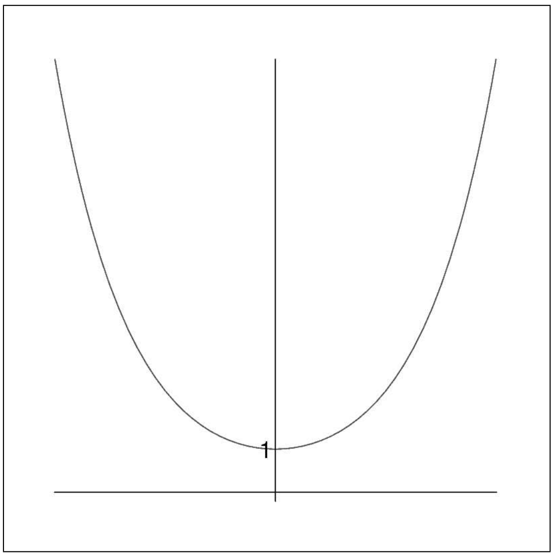



Abbildung 9.6.: Cosinus hyperbolicus

## 9.9. Höhere Ableitungen

**Definition 9.35.**

(1) (a) $I \subset \mathbb{R}$ sei ein (nicht einpunktiges) Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf $I$.

$f$ heißt in $x_0 \in I$ *zweimal differenzierbar*, wenn $f'$ in $x_0$ differenzierbar ist.

In diesem Fall heißt

$$f''(x_0) := (f')'(x)$$

die *zweite Ableitung von $f$ in $x_0$.*

(b) Ist $f$ in jedem $x_0 \in I$ zweimal differenzierbar, so heißt $f$ *zweimal differenzierbar auf $I$* und

$$f'' := (f')' : I \to \mathbb{R}$$

heißt die *zweite Ableitung von $f$ auf $I$.*

(c) Per Induktion erhält man die $n$-te Ableitung etc.

$$f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), f^{(5)}(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$$

bzw.

$$f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \dots, f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$$

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ heißt $f$ auf $I$ *$n$-mal stetig differenzierbar*, wenn $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ auf $I$ existieren (d.h. wenn $f$ auf $I$ $n$-mal differenzierbar ist) *und stetig sind.*

Bezeichnung in diesem Fall:

$$f \in C^n(I)$$

($C^n$ ist die Menge der auf $I$ $n$-mal stetig differenzierbaren Funktionen)

$n = 1$: $f \in C^1(I) \;\Leftrightarrow\; f$ ist stetig differenzierbar auf $I$.

$$C^0(I) := C(I), \qquad C^\infty(I) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I)$$

Weitere Bezeichnung:

$$f^{(0)} := f, \quad f^{(1)} := f', \quad f^{(2)} := f'', \quad f^{(3)} := f'''$$

**Beispiel 9.36.**

(1)

$$\begin{aligned}
(\cos'')(x) &= -(\sin')(x) = -\cos(x) \\
(\cos''')(x) &= \sin(x) \\
\left(\cos^{(4)}\right)(x) &= \cos(x) \\
(\sin'')(x) &= -\sin(x) \\
(\sin''')(x) &= -\cos(x) \\
\left(\sin^{(4)}\right)(x) &= \sin(x)
\end{aligned}$$

(2) $E(x) = e^x$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $E^{(n)}(x) = E(x)$, also $E \in C^\infty(\mathbb{R})$

(3)

$$f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Für $x > 0$: $f'(x) = 2x$, für $x < 0$: $f'(x) = -2x$.

Für $x = 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{für } x > 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{x \to 0} 0$$

$\Rightarrow$ $f$ ist in 0 differenzierbar und $f'(0) = 0$.

$\Rightarrow$ $f$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2x & \text{für } x \geq 0 \\ -2x & \text{für } x < 0 \end{array} \right\} = 2|x|$$

Insbesondere ist $f'$ stetig auf $\mathbb{R}$, also ist $f$ *stetig differenzierbar*, $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Da $f'$ in 0 nicht differenzierbar ist, ist $f$ *in* 0 *nicht zweimal differenzierbar.*

**Beispiel 9.37** (Nichtiges Beispiel)**.**

$$I := [0, \infty), \quad f(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

$f$ ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar, und

$$\forall x \in (0, \infty) \quad f'(x) = \tfrac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + x^{\frac{3}{2}} \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{x^2}\right) = \tfrac{3}{2}\sqrt{x} \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

Ferner ist $f$ in 0 differenzierbar, denn:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \sqrt{x} \underbrace{\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)}_{\in[-1,1]} \xrightarrow{x \to 0} 0$$

Also ist $f$ differenzierbar auf $I = [0, \infty)$, aber $f$ ist nicht stetig differenzierbar, da $f'$ offenbar unstetig im Punkt 0.

sogar: $f'$ ist auf *keinem* Intervall $[0, \varepsilon]$ (mit $\varepsilon > 0$) beschränkt.

## 9.10. Höhere Ableitungen bei Potenzreihen

Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. $I := (x_0 - r, x_0 + r)$

Aus 9.28 folgt: $f$ ist auf $I$ differenzierbar und

$$f'(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x - x_0)^{n-1}}_{\text{Konvergenzradius wieder } r} \quad \forall x \in I$$

9.28 $\Rightarrow$ $f'$ ist auf $I$ differenzierbar, und

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n (x - x_0)^{n-2} \quad \forall x \in I$$

induktiv fortsetzen:

$\Rightarrow$ $f$ ist *beliebig* oft differenzierbar ($f \in C^\infty(I)$), und

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots\big(n-(k-1)\big)\cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-k} \quad \forall x \in I$$

Insbesondere für $x = x_0$:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(x_0) = k(k-1)(k-2)\cdots\big(k-(k-1)\big)\cdot a_k = k!\cdot a_k$$

$$\Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}: \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

**Definition 9.38.** Sei $\varepsilon > 0$ und $f \in C^\infty\big(U_\varepsilon(x_0)\big)$ mit einem $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Potenzreihe

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

die zu $f$ und $x_0$ gehörende Taylor–*Reihe.*

*Frage:* $x_0, \varepsilon, f$ wie oben. Gilt dann

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \quad ?$$

*Antwort:* Nicht immer!

**Beispiel 9.39.**

(1) Ist $f$ eine Potenzreihe und $\varepsilon \le r$, so lautet die Antwort: **Ja**.

(2)

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

In der Saalübung wurde gezeigt: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, und

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(0) = 0$$

Also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = 0 \neq f(x) \text{ für } x \neq 0$$

Also lautet hier die Antwort: **Nein**.

## 9.11. Satz von Taylor

**Satz 9.40** (Satz von TAYLOR)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^n(I)$ und $f^{(n+1)}$ existiere auf $I$.

Sind $x, x_0 \in I$, so existiert ein $\xi = \xi(x, x_0)$ ($\xi$ hängt von $x$ und $x_0$ ab) zwischen $x$ und $x_0$ mit $\xi \neq x, \xi \neq x_0$, und

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

Spezialfall $n = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi) \cdot (x - x_0)$$

(Mittelwertsatz (9.18))

**Beweis:** Nur für den Fall $x < x_0$. Wähle $\varrho \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \varrho \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Zu zeigen: $\exists \xi \in (x, x_0) \;\; \varrho = f^{(n+1)}(\xi)$

Definiere für $t \in [x, x_0]$:

$$h(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \varrho \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Dann: $h \in C[x, x_0]$, $h$ differenzierbar auf $[x, x_0]$,

$$\begin{aligned} h'(t) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{f^{(k)}(t)}{k!} k(x-t)^{k-1}}_{=\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}}}_{=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k} + t\varrho \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \varrho \frac{(x-t)^n}{n!} \end{aligned}$$

Ferner $h(x) = 0, h(x_0) = 0$ nach Wahl von $\varrho$. (s.o.)

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (x, x_0)$ mit

$$h'(\xi) = \frac{h(x_0) - h(x)}{x_0 - x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n + \varrho \cdot \frac{(x-\xi)^n}{n!} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varrho = f^{(n+1)}(\xi)$$

□

**Satz 9.41.** $e \notin \mathbb{Q}$

**Beweis:** *Annahme:* $e = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$.

Wegen $2 < e < 3$ gilt $e \notin \mathbb{N}$ und daher $n \geq 2$.

Setze $f(x) := e^x,\ x_0 := 0,\ x := 1$.

Nach TAYLORschem Satz 9.40 existiert $\xi \in (0,1)$ mit

$$\underbrace{f(1)}_{=e=\frac{m}{n}} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (1-0)^k}_{=\frac{1}{k!}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (1-0)^{n+1}}_{=\frac{e^\xi}{(n+1)!}}$$

Multipliziere mit $n!$

$$\underbrace{m(n-1)!}_{\in\mathbb{N}} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!}}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\frac{e^\xi}{n+1}}_{\in(0,\frac{e}{3})\subset(0,1)\Rightarrow\notin\mathbb{N}} \qquad \lightning$$

□

**Definition 9.42.** $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^n(I)$, $x_0 \in I$.
Dann heißt

$$\boxed{T_n(x;x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

*$n$-tes* TAYLOR*–Polynom von $f$ in $x_0$*

*Eigenschaften:*

Sei $p(x) := T_n(x;x_0)$.

(1) $p$ ist Polynom vom Grad $\leq n$, $p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$

(2) Ist $q$ ein Polynom vom Grad $\leq n$ und gilt $q^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, \dots, n)$, so gilt $q = p$.

Das heißt: Das TAYLOR-Polynom ist das *einzige* Polynom vom Grad $\leq n$ mit obiger Approximationseigenschaft.

(3) Der TAYLORsche Satz 9.40 lautet also:

$\forall x, x_0 \in I$ $(x \neq x_0)$ $\exists \xi$ zwischen $x$ und $x_0$:

$$f(x) = T_n(x;x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Die oben gestellte Frage „Ist $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$?“ ist nach 9.40 also äquivalent zu der Frage: „Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$ ?“

**Satz 9.43.** Sei $I = (a, b)$ ($a < b$, $a = -\infty$ und/oder $b = +\infty$ zugelassen). Ferner sei $f \in C^\infty(I)$ und $x_0 \in I$. Es existiere ein $x > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 \; \forall x \in I \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leq n! \cdot c^n$$

Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset I$ und

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \text{ für alle } x \in U_\delta(x_0)$$

**Beweis:** Wähle $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset I$ und $\delta \leq \frac{1}{c}$. Sei $x \in U_\delta(x_0)$, also $|x - x_0| < \delta \leq \frac{1}{c}$, d.h.

$$c|x - x_0| < 1$$

Nach TAYLORschem Satz 9.40 existiert ein $\xi$ zwischen $x$ und $x_0$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}_{=:\alpha_n}$$

Es gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|\alpha_n| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{(n+1)! c^{n+1}}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1} = \left(c \cdot |x - x_0|\right)^{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

$\square$

## 9.12. Extrema

**Erinnerung:** $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in I$ differenzierbar, $x_0$ innerer Punkt von $I$, $f$ habe in $x_0$ ein lokales Extremum. Dann ist $f'(x_0) = 0$.

(Umkehrung ist falsch: $f(x) = x^3$ hat in $x_0 = 0$ kein lokales Extremum, obwohl $f'(0) = 0$).

**Satz 9.44.** $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(I)$ und $x_0$ sei innerer Punkt von $I$. Es gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

aber

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Dann gilt:

(1) Ist $n$ *gerade*, so hat $f$ in $x_0$ ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Maximum bzw. Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ bzw. $f^{(n)}(x_0) > 0$.

(2) Ist $n$ *ungerade*, so hat $f$ in $x_0$ kein lokales Extremum.

**Beweis:** Da $f^{(n)}$ stetig und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset I$ und $f^{(n)}(x)$ hat für $x \in U_\delta(x_0)$ dasselbe Vorzeichen wie $f^{(n)}(x_0)$.

Sei $x \in U_\delta(x_0)$. Nach 9.40 (Taylor) existiert ein $\xi$ zwischen $x$ und $x_0$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=0 \text{ für } k \geq 1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!}(x-x_0)^n = f(x_0) + R(x)$$

zu (1): Sei $n$ gerade:

Ist $f^{(n)}(x_0) > 0$ bzw. $< 0$, so ist auch $f^{(n)}(\xi) > 0$ bzw. $< 0$. Ferner $(x-x_0)^n \geq 0$ (da $n$ gerade).

$$\Rightarrow \quad R(x) \left\{ \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix} \right\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \begin{cases} \geq f(x_0) & \Rightarrow \text{lokales Minimum} \\ \leq f(x_0) & \Rightarrow \text{lokales Maximum} \end{cases}$$

zu (2): Sei $n$ ungerade: Wie vorher $f^{(n)}(\xi) > 0$ bzw. $< 0$.

Jetzt aber

$$(x-x_0)^n \begin{cases} > 0 & \text{für } x > x_0 \\ < 0 & \text{für } x < x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad R(x) \begin{cases} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} & x > x_0 \\ \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases} & x < x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \begin{cases} \begin{cases} > f(x_0) \\ < f(x_0) \end{cases} & x > x_0 \\ \begin{cases} < f(x_0) \\ > f(x_0) \end{cases} & x < x_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ kein lokales Extremum.

□

**Beispiel 9.45.**

(1) $f(x) = x^n$; $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$; $f^{(n)}(0) = n! > 0$

$\Rightarrow$ Falls $n$ gerade, hat $f$ in 0 ein lokales Minimum. Falls $n$ ungerade, hat $f$ in 0 kein lokales Extremum.

(2) a)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Bekannt: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ f^{(n)}(0) = 0$

$f$ hat in 0 ein lokales Minimum.

b)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Wieder $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}_0 \ \ f^{(n)}(0) = 0$.

Aber $f$ hat in 0 kein lokales Extremum.

# 10. Das Riemann-Integral

Stets in diesem Abschnitt: $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt.* $m := \inf f\big([a,b]\big), M := \sup f\big([a,b]\big)$.

**Definition 10.1.** $Z = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ heißt eine *Zerlegung* von $[a,b]$, wenn

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

$\mathcal{Z}$ heißt die Menge der Zerlegungen von $[a,b]$.

Ferner:

$$I_j := [x_{j-1}, x_j] \quad (j = 1, \ldots n)$$

$$|I_j| := x_j - x_{j-1} \quad (\text{„Länge von } I_j\text{“})$$

$$m_j := \inf f(I_j), \quad M_j := \sup f(I_j)$$

$$s_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot |I_j| \quad (\textit{Untersumme} \text{ von } f \text{ bezüglich } Z)$$

$$S_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} M_j \cdot |I_j| \quad (\textit{Obersumme} \text{ von } f \text{ bezüglich } Z)$$

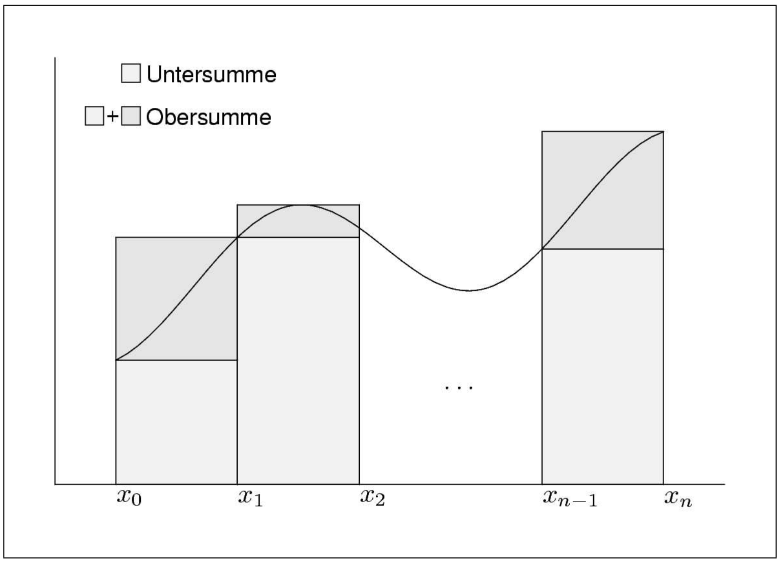



Abbildung 10.1.: Ober- und Untersummen

**Klar:** $m \leq m_j \leq M_j \leq M$, also wegen $|I_j| > 0$:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} m|I_j|}_{m(b-a)} \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} m_j|I_j|}_{s_f(Z)} \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} M_j|I_j|}_{S_f(Z)} \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} M|I_j|}_{M(b-a)}$$

$$\Rightarrow \quad \forall\, Z \in \mathcal{Z} \quad m(b-a) \;\leq\; s_f(Z) \;\leq\; S_f(Z) \;\leq\; M(b-a)$$

**Definition 10.2.** Sind $Z_1, Z_2$ Zerlegungen von $[a, b]$, so heißt $Z_2$ *Verfeinerung von* $Z_1$, wenn $Z_2 \supset Z_1$.

**Satz 10.3.** $Z_1, Z_2$ seien Zerlegungen von $[a, b]$.

(1) Ist $Z_2$ Verfeinerung von $Z_1$, so gilt

$$s_f(Z_1) \leq s_f(Z_2) \quad \text{und} \quad S_f(Z_2) \leq S_f(Z_1)$$

(2) $s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2)$

**Beweis:**

(1) (nur die erste Ungleichung)

Sei $Z_1 = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Es genügt, der Fall $Z_2 = Z_1 \cup \{\xi\}$, $\xi \notin Z_1$ zu betrachten; Rest folgt induktiv.

Sei etwa $x_{j-1} < \xi < x_j$.

$$\begin{aligned} s_f(Z_2) &= \sum_{k=1}^{j-1} m_k|I_k| + \underbrace{\inf f\big([x_{j-1}, \xi]\big)}_{\geq m_j} \cdot (\xi - x_{j-1}) + \underbrace{\inf f\big([\xi, x_j]\big)}_{\geq m_j} \cdot (x_j - \xi) + \sum_{k=j}^{n} m_k|I_k| \\ &\geq \sum_{k=1}^{j-1} m_k|I_k| + \underbrace{m_j(\xi - x_{j-1}) + m_j(x_j - \xi)}_{=m_j|I_j|} + \sum_{k=j+1}^{n} m_k|I_k| \\ &= s_f(Z_1) \end{aligned}$$

(2) $Z := Z_1 \cup Z_2$ ist Verfeinerung sowohl von $Z_1$ also auch von $Z_2$. Nach obigem folgt:

$$\Rightarrow \quad s_f(Z_1) \;\leq\; s_f(Z) \;\leq\; S_f(Z) \;\leq\; S_f(Z_2)$$

$\square$

**Definition 10.4.** Ist $Z_2$ beliebige, fest gewählte Zerlegung von $[a, b]$, so gilt nach 10.3:

$$s_f(Z) \leq S_f(Z_2) \quad \text{für jede Zerlegung } Z \text{ von } [a, b]$$

$\Rightarrow$ Es existiert

$$s_f = \sup\{s_f(Z) : \; Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$$

und es gilt:

$$s_f \leq S_f(Z_2) \quad \text{für jede Zerlegung } Z_2 \text{ von } [a, b]$$

$\Rightarrow$ Es existiert

$$S_f = \inf\{S_f(Z_2) : \ Z_2 \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

und es gilt:

$$s_f \le S_f$$

Man nennt

$$s_f = \underline{\int_a^x} \text{ das } \textit{untere Integral} \text{ von } f$$

$$S_f = \overline{\int_a^x} \text{ das } \textit{obere Integral} \text{ von } f$$

**Definition 10.5.** $f$ heißt (Riemann-) *integrierbar* über $[a,b]$, wenn $s_f = S_f$.
In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx \ \left( = \int_a^b f\ dx \right) := S_f = s_f$$

das (Riemann-) *Integral* von $f$ über $[a,b]$.

$$R[a,b] := \{\ f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ ist integrierbar über } [a,b]\ \}$$

**Beispiel 10.6.**

(1) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $\forall x \in [a,b]\ \ f(x) := c$

$\Rightarrow\ m = c = M$

$\Rightarrow\ m(b-a) \le s_f(Z) \le S_f(Z) \le M(b-a)$ für jede Zerlegung $Z$.

$$\Rightarrow\ \forall\ Z \in \mathcal{Z}\ \ s_f(Z) = S_f(Z) = c(b-a)$$

$$\Rightarrow\ s_f = S_f = c(b-a)$$

$\Rightarrow\ f$ ist integrierbar über $[a,b]$, und $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$.

(2) Sei $[a,b] = [0,1]$ und $f(x) := x$.

Sei $n \in N$ und $Z_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit $x_j = \frac{j}{n}$ für $j = 0, \ldots, n$.

Also $|I_j| = \frac{1}{n}$, $m_j = f(x_{j-1}) = \frac{j-1}{n}$, $M_j = f(x_j) = \frac{j}{n}$.

$$\Rightarrow\ s_f(Z_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} (j-1) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n}$$

$$\Rightarrow \; S_f(Z_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

Also

$$\underbrace{\frac{n-1}{2n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}} = s_f(Z_n) \leq s_f \leq S_f \leq S_f(Z_n) = \underbrace{\frac{n+1}{2n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq s_f \leq S_f \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad s_f = S_f = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f$ ist über $[a,b]$ integrierbar, und

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

(3) Setze

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f$ ist beschränkt.

Sei $Z = \{x_1, \ldots, x_n\}$ beliebige Zerlegung von $[0,1]$.

$$\Rightarrow \forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad m_j = \inf f([x_{j-1}, x_j]) = 0$$

$$\Rightarrow \forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad M_j = \sup f([x_{j-1}, x_j]) = 1$$

$$\Rightarrow s_f(Z) = \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j| = 0$$

$$\Rightarrow S_f(Z) = \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j| = \sum_{j=1}^{n} |I_j| = 1 - 0 = 1$$

$$\Rightarrow s_f = 0,\; S_f = 1$$

$\Rightarrow f$ ist nicht über $[0,1]$ integrierbar.

**Satz 10.7.**

(1) Sind $f, g \in R[a,b]$ und gilt $\forall x \in [a,b] \;\; f(x) \leq g(x)$, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(2) Sind $f, g \in R[a,b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch

$$\alpha f + \beta g \in R[a,b]$$

und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

(d.h. $R[a,b]$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und das Integral ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Homomorphismus von $R[a,b]$ nach $\mathbb{R}$.)

**Beweis:**

(1) Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ Zerlegung von $[a,b]$, $I_j, m_j, M_j$ wie immer und $\bar{m}_j := \inf g(I_j)$, $\bar{M}_j := \sup g(I_j)$.

Wegen

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq g(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m_j \leq \bar{m}_j \\ M_j \leq \bar{M}_j \end{cases}$$

$$\Rightarrow s_f(Z) \leq s_g(Z) \leq s_g = \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = s_f \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(da $f, g \in R[a,b]$)

(2) i) $f \in R[a,b] \quad \Rightarrow \quad -f \in R[a,b]$ (selbst) und

$$\Rightarrow \int_a^b (-f)(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

ii) $\alpha \in \mathbb{R}, f \in R[a,b] \quad \Rightarrow \quad \alpha f \in R[a,b]$ und

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

iii) $f, g \in R[a,b] \quad \Rightarrow \quad f + g \in R[a,b]$ und

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Seien dann $Z_1, Z_2$ beliebige Zerlegungen von $[a,b]$, $Z := Z_1 \cup Z_2$ (gemeinsame Verfeinerung)

Dann

$$s_{f+g}(Z) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\inf(f+g)[x_{j-1}, x_j]}_{\substack{\geq \inf f([x_{j-1}, x_j]) \\ + \inf g([x_{j-1}, x_j])}} \cdot |I_j| \geq s_f(Z) + s_g(Z) \geq s_f(Z_1) + s_g(Z_2)$$

Andererseits $s_{f+g}(Z) \leq s_{f+g}$

$$s_{f+g} \geq s_f(Z_1) + s_g(Z_2)$$

(für beliebige Zerlegungen $Z_1, Z_2$ von $[a,b]$).

$$\Rightarrow s_{f+g} \geq s_f + s_g(Z_2)$$

$$\Rightarrow s_{f+g} \geq s_f + s_g = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(da $f, g \in R[a,b]$) Genauso

$$S_{f+g} \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

Da $s_{f+g} \leq S_{f+g}$, folgt

$$s_{f+g} = S_{f+g} = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

□

## 10.1. Integrabilitätskriterium

**Satz 10.8** (RIEMANNsches Integrabilitätskriterium)**.**

$$f \in R[a,b] \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\; \exists Z \in \mathcal{Z} \quad S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$$

**Beweis:**

„$\Rightarrow$“: Sei

$$S := \int\limits_a^b f\,dx \quad (= s_f = S_f)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Es existieren Zerlegungen $Z_1, Z_2$ von $[a,b]$ mit

$$s_f(Z_1) > s_f - \tfrac{\varepsilon}{2} = S - \tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$S_f(Z_2) < S_f + \tfrac{\varepsilon}{2} = S + \tfrac{\varepsilon}{2}$$

$Z := Z_1 \cup Z_2$, dann:

$$s_f(Z) \geq s_f(Z_1) > S - \tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$S_f(Z) \leq S_f(Z_2) < S + \tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$$

„$\Leftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert Zerlegung $Z$ von $[a,b]$ mit

$$S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad S_f \leq S_f(Z) < s_f(Z) + \varepsilon < s_f + \varepsilon \leq S_f + \varepsilon$$

Dies gilt für alle $\varepsilon > 0$. Für $\varepsilon \to 0$ folgt:

$$\Rightarrow \quad S_f = s_f \quad \Rightarrow \quad f \in R[a,b]$$

□

**Definition 10.9.** Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung, $m_j, M_j, I_,$ wie oben.

(1) $|Z| := \max\{|I_1|, \dots, |I_n|\}$ heißt *Feinheit von Z*

(2) Ist $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ mit $\xi_j \in I_j$ $(j = 1, \dots, n)$, so heißt $\xi$ ein zu $Z$ passender *Zwischenvektor* und

$$\sigma_f(Z, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|I_j|$$

eine RIEMANN*sche-Summe.*

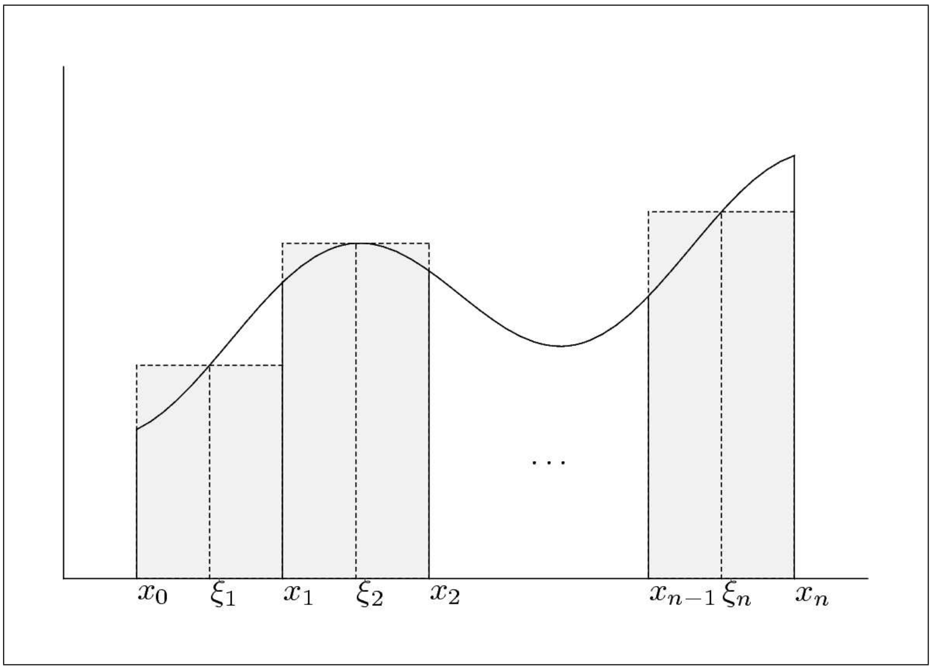



Abbildung 10.2.: RIEMANNsche Summe

**Satz 10.10.** $(Z_n)$ sei eine Folge in $\mathcal{Z}$ mit $|Z_n| \to 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\xi^{(n)}$ ein zu $Z_n$ passender Zwischenvektor.

Dann gilt:

(1) $s_f(Z_n) \to s_f$ , $S_f(Z_n) \to S_f$ für $n \to \infty$

(2) Ist $f \in R[a, b]$, so gilt

$$\sigma_f\left(Z_n, \xi^{(n)}\right) \to \int_a^b f\,dx \quad \text{für } n \to \infty$$

**Satz 10.11.** Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *monoton*, so gilt $f \in R[a, b]$.

**Beweis:** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ die äquidistante Zerlegung von $[a, b]$, also $x_j = a + j \cdot \frac{b-a}{n}$

$(j = 0, \ldots, n)$. Wir führen den Beweis nur für monoton wachsendes $f$.

Dann ist

$$m_j = \inf f(I_j) = f(x_{j-1})\ ,\quad M_j = \sup f(I_j) = f(x_j)\ ,\quad |I_j| = \frac{b-a}{n}$$

$$\Rightarrow \quad S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \cdot \frac{b-a}{n} - \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}) \cdot \frac{b-a}{n} = (f(x_n) - f(x_0)) \cdot \frac{b-a}{n} =: \alpha_n$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0 \ \ \alpha_n < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad S_f(Z) - s(f) < \varepsilon$$

Nach 10.8 folgt: $f \in R[a, b]$ □

**Satz 10.12.** Ist $f \in C[a, b]$, so ist $f \in R[a, b]$ (stetige Funktionen sind integrierbar).

**Beweis:** Sei $f \in C[a, b]$. Dann ist $f$ beschränkt. Sei $\varepsilon > 0$.

Da $f$ nach 7.30 auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ *gleichmäßig stetig* ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\big|f(t) - f(s)\big| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{für alle } t, s \in [a, b] \text{ mit } |t - s| < \delta$$

Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit:

$$|I_j| < \delta \quad \text{für } j = 1, \ldots, n$$

Es gilt:

$$m_j = \inf f(I_j) = f(\xi_j), \qquad M_j = \sup f(I_j) = f(\eta_j)$$

mit Punkten $\xi_j, \eta_j \in I_j$.

$$\Rightarrow M_j - m_j = f(\eta_j) - f(\xi_j) = |f(\eta_j) - f(\xi_j)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

da $\xi_j, \eta_j \in I_j$ und $|I_j| < \delta$, also $|\eta_j - \xi_j| < \delta$.

$$\Rightarrow S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(M_j - m_j)}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}} \cdot |I_j| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{n} |I_j| = \varepsilon$$

Nach 10.8 gilt: $f \in R[a, b]$. □

## 10.2. Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

**Definition 10.13.** $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall; $G, g : I \to \mathbb{R}$.

$G$ heißt *Stammfunktion* von $g$ auf $I$, wenn $G$ differenzierbar ist auf $I$ und $G' \equiv g$ auf $I$.

Beachte: Sind $G, H$ Stammfunktionen von $g$ auf $I$, so existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in I \quad G(x) = H(x) + c \qquad \text{(nach 9.22)}$$

**Satz 10.14** (1. Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung)**.** Sei $f \in R[a,b]$ und $f$ besitze auf $[a,b]$ eine Stammfunktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Dann gilt:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad =: F(x)\Big|_a^b =: \big[F(x)\big]_a^b}$$

**Beweis:** Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ Zerlegung von $[a,b]$.

$$\Rightarrow F(x_j) - F(x_{j-1}) \underset{\text{MWS}}{=} \underbrace{F'(\xi_j)}_{=f(\xi_j)} \cdot (x_j - x_{j-1}) \text{ mit einem } \xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$$

wobei gilt

$$f(\xi_j) \begin{cases} \geq m_J \\ \leq M_j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad m_j|I_j| \;\leq\; F(x_j) - F(x_{j-1}) \;\leq\; M_j|I_j|$$

$$\Rightarrow \quad s_f(Z) \;\leq\; \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \big(F(x_j) - F(x_{j-1})\big)}_{\substack{(F(x_n)-F(x_{n-1})) \\ +F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+\cdots}} \;\leq\; S_f(Z)$$

$$\Rightarrow \quad s_f \;\leq\; F(b) - F(a) \;\leq\; S_f = s_f \text{ (wegen } f \in R[a,b])$$

$$\Rightarrow \quad F(b) - F(a) = S_f = s_f = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

□

**Warnungen:**

(1) Es gibt Funktionen, die Stammfunktionen besitzen, aber nicht integrierbar sind.
**Beispiel 10.15.**

$$F(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \in (0,1] \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $F$ ist differenzierbar auf $[0,1]$
$\Rightarrow$ $f := F'$ auf $[0,1]$ unbeschränkt.

$\Rightarrow$ $f$ ist (da unbeschränkt) nicht integrierbar.

Aber $f$ hat eine Stammfunktion, nämlich $F$.

(2) Es gibt Funktionen, die integrierbar sind, aber keine Stammfunktion besitzen.

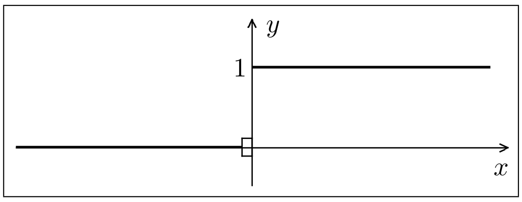



Abbildung 10.3.: Graph von $f(x)$ aus Beispiel 10.16

**Beispiel 10.16.**

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1,0) \\ 1 & \text{für } x \in [0,1] \end{cases}$$

(vgl. Abbildung 10.3)

$f$ ist monoton $\Rightarrow$ $f \in R[a,b]$.

*Annahme:* Es existiert eine Stammfunktion $F$ zu $f$ auf $[-1,1]$.

$\Rightarrow$ $F' = 0$ auf $[-1,0)$ $\Rightarrow$ $F \equiv c_1$ auf $[-1,0)$ bzw.

$F' \equiv 1$ auf $[0,1]$ $\Rightarrow$ $\forall x \in [0,1]\ F(x) = x + c_2$

$F$ differenzierbar $\Rightarrow$ $F$ stetig (in 0) $\Rightarrow c_1 = c_2$.

$F$ differenzierbar in 0

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to 0-} \frac{F(x)-F(0)}{x-0}}_{=0\quad \lightning} = \lim_{x\to 0+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = f(0) = 1$$

**Beispiel 10.17.**

(1) Seien $0 < a < b, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1$.

$f(x) = x^\alpha$

$f$ monoton auf $[a,b]$ $\Rightarrow$ $f \in R[a,b]$

Setze $F(x) := \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$; dann ist $F$ differenzierbar und $F' = f$. Nach 10.14 folgt:

$$\Rightarrow \int_a^b x^\alpha\, dx = \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

(2) Seien $0 < a < b, f(x) = \frac{1}{x}$

$f$ monoton auf $[a,b]$ $\Rightarrow$ $f \in R[a,b]$

$F(x) := \log x$; $F$ differenzierbar auf $[a,b]$ und $F' = f$. Nach 10.14 folgt:

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \log b - \log a = \log\left(\tfrac{b}{a}\right)$$

(3) $a = 0, b = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \cos x$

$f$ ist monoton auf $[a, b] \quad \Rightarrow \quad f \in R[a, b]$

$F(x) := \sin x$; $F$ differenzierbar auf $[a, b]$, $F' = f$. Nach 10.14 folgt:

$$\Rightarrow \int\limits_a^b \cos(x)\, dx = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

**Beispiel 10.18** (Anwendung von 10.10)**.** $a_n := \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{j}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir wollen zeigen, dass $(a_n)$ konvergiert und den Limes $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ berechnen.

Es gilt $a_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{j}{n}} \cdot \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Setze $f(x) := \sqrt{x}$ für alle $x \in [0, 1]$ und $Z_n := \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit $x_j = \frac{j}{n}$ für $j = 0, \ldots, n$

Es ist $f(x_j) = \sqrt{\frac{j}{n}}$ und $|Z_n| = \frac{1}{n} = x_j - x_{j-1}$

Also

$$a_n = S_f(Z_n) = \sigma_f\left(Z_n, \xi^{(n)}\right) \qquad \text{für } \xi^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n)$$

Nach 10.12 gilt $f \in R[0, 1]$

Nach 10.10 gilt $a_n \to \int_0^1 f(x)\, dx$

Nach 10.14 gilt

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Also $a_n \to \frac{2}{3}$.

**Satz 10.19.** Sei $c \in [a, b]$. Dann gilt

$$f \in R[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad f\big|_{[a,c]} \in R[a, c] \text{ und } f\big|_{[c,b]} \in R[c, b] \quad \big(\text{kurz: } f \in R[a, c] \text{ und } f \in R[c, b]\,\big)$$

In diesem Fall:

$$\int\limits_a^b f\, dx = \int\limits_a^c f\, dx + \int\limits_c^b f\, dx$$

**Beweis:**

„$\Rightarrow$“: selbst.

„$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon > 0$

Da $f \in R[a,c]$, existiert Zerlegung $Z_1$ von $[a,c]$ mit

$$s_f(Z_1) > s_f - \varepsilon = \int\limits_a^c f\,dx - \varepsilon$$

Analog: existiert $Z_2$ Zerlegung von $[c,b]$ mit

$$s_f(Z_2) > \int\limits_c^b f\,dx - \varepsilon$$

Setze $Z := Z_1 \cup Z_2$. $Z$ ist Zerlegung von $[a,b]$, und

$$s_f(Z) = s_f(Z_1) + s_f(Z_2) > \underbrace{\int\limits_a^c f\,dx + \int\limits_c^b f\,dx}_{=:S} - 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad S - 2\varepsilon < s_f(Z) \le s_f$$

Für $\varepsilon \to 0+$ ergibt sich:

$$S \le s_f$$

Analog: $S \ge S_f$. Wegen $s_f \le S_f$ folgt somit:

$$S_f = s_f = S$$

$\square$

**Beispiel 10.20.** Sei $(f_n)$ Funktionenfolge, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert wie in Abbildung 10.4 dargestellt.

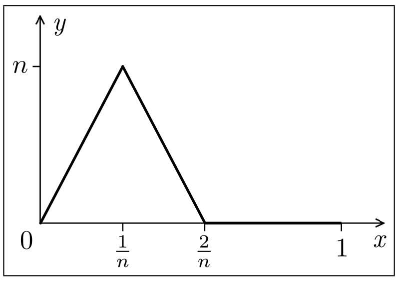



Abbildung 10.4.: Funktionenfolge $f_n$ (Beispiel 10.20)

Aus 10.19 folgt:

$$\forall n\ f_n \in R[0,1], \quad \int\limits_0^1 f_n\,dx = 1$$

Ferner: $(f_n)$ konvergiert *punktweise* gegen 0. (Beweis selbst)

Also:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n\,dx = 1,$$

aber

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$$

D.h.: Der Limes darf i.a. nicht mit dem Integral vertauscht werden!

Beachte: $f_n$ konvergiert *nicht* gleichmäßig gegen 0.

**Satz 10.21.** Sei $(f_n)$ eine Funktionenfolge auf $[a,b]$ mit $f_n \in R[a,b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\left| \begin{matrix} f_n \\ \sum f_n \end{matrix} \right|$ konvergiere auf $[a,b]$ *gleichmäßig* gegen $\left| \begin{matrix} f \\ s \end{matrix} \right| : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Dann gilt:

$$\left| \begin{matrix} f \\ s \end{matrix} \right| \in R[a,b]$$

und

$$\left| \begin{matrix} \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f\,dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n\,dx \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b s\,dx = \int_a^b \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n\,dx \end{matrix} \right|$$

**Beispiel 10.22** (Anwendung auf Potenzreihen)**.** Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$.

Sei $[a,b] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$.

Nach 8.10 folgt, dass die Potenzreihe auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert.

$\Rightarrow\ f \in R[a,b]$ und

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x-x_0)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}}{n+1} \end{aligned} \tag{10-i}$$

Setze

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \tag{10-ii}$$

Nach 9.28 folgt, dass die Potenzreihe in (10-ii) denselben Konvergenzradius hat wie die gliedweise differenzierte Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

also $r$, und es gilt $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

**Fazit:** (aus 9.28 und 10.22)

Potenzreihe dürfen auf Ihrem *(offenen)* Konvergenzintervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ *gliedweise* differenziert und integriert werden (wobei gliedweise Integration im Sinne von (10-i) zu verstehen ist).

**Beispiel 10.23.** Bestimme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n\ ,\quad x \in (-1,1)$.

Setze

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

(Konvergenzradius ist 1)

Ferner:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ f(x) + \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1)x^n}_{=(x^{n+1})'} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)' \\ &= \left(x\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x-x\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

**Erinnerung:**

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $L \geq 0$ und $h : D \to \mathbb{R}$ LIPSCHITZ-stetig, d.h.

$$\big|h(t) - h(s)\big| \leq L \cdot |t-s| \quad \text{für alle } s,t \in D$$

Dann ist $h$ stetig auf $D$.

**Satz 10.24.** Seien $f, g \in R[a,b]$.

(1) Sei $D := f\big([a,b]\big)$ (beschränkt, da $f$ beschränkt) und $h : D \to \mathbb{R}$ LIPSCHITZ-*stetig*.

Dann gilt $h \circ f \in R[a,b]$.

(2) $|f| \in R[a,b]$ und

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx} \qquad \text{(Dreiecksungleichung für Integrale)}$$

(3) $f \cdot g \in R[a,b]$

(4) Es existiere ein $\delta > 0$ mit $\forall x \in [a,b]\ \ \big|g(x)\big| \geq \delta$

Dann gilt $\frac{f}{g} \in R[a,b]$

**Beweis:**

(1) hier weggelassen.

(2) Setze $h(t) := |t|$.

Dann: $h$ Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$ (mit $L = 1$)

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} \; h \circ f = |f| \in R[a,b]$$

Ferner

$$f \leq |f|, \quad -f \leq |f|$$

$$\underset{10.7}{\Rightarrow} \begin{cases} \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b \big|f(x)\big|\,dx \\ \int\limits_a^b (-f(x))\,dx \leq \int\limits_a^b \big|f(x)\big|\,dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b \big|f(x)\big|\,dx$$

(3) Sei $\psi \in R[a,b] \quad \Rightarrow \quad \psi$ beschränkt.

$\Rightarrow D := \psi\big([a,b]\big)$ beschränkt

$$\Rightarrow \; \exists \alpha > 0 \; \forall t \in D \quad |t| \leq \alpha$$

Setze $h(t) := t^2$.

$$\Rightarrow \; \forall t, s \in D \quad \big|h(t) - h(s)\big| \; = \; |t-s| \cdot \underbrace{|t+s|}_{\leq 2\alpha} \; \leq \; 2\alpha |t-s|$$

$\Rightarrow h$ Lipschitz-stetig.

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} \; h \circ \psi = \psi^2 \in R[a,b]$$

Aus $f, g \in R[a,b]$ folgt mit 10.7

$$f+g, f-g \in R[a,b]$$

$$\Rightarrow \; (f+g)^2, (f-g)^2 \in R[a,b]$$

$$\underset{10.7}{\Rightarrow} \; \underbrace{\frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]}_{=f\cdot g} \in R[a,b]$$

(4) nur angedeutet:

$$h(t) = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g} \in R[a,b] \quad \underset{(1)}{\Rightarrow} \quad \frac{f}{g} \in R[a,b]$$

$\square$

**Satz 10.25** (2. Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung).
Es sei $f \in R[a,b]$ und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\ dt$$

(nach 10.19 existiert das rechtsstehende Integral)

Dann gilt:

(1) $\forall x, y \in [a,b] \quad F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\ dt$

(2) $F$ ist stetig

(3) Ist $f$ stetig, so ist $F$ eine Stammfunktion von $f$ auf $[a,b]$, also

$$\forall x \in [a,b] \quad F'(x) = f(x)$$

Als Vorbemerkung noch „triviale“ Definitionen:

Für $f \in R[a,b]$ setze

$$\int_b^a f(x)\ dx := -\int_a^b f(x)\ dx \quad \text{und} \quad \forall c \in [a,b] \quad \int_c^c f(x)\ dx := 0$$

**Beweis:**

(1) Die Behauptung folgt aus 10.19

(2) Setze $\gamma := \sup\left\{\left|f(t)\right| : t \in [a,b]\right\}$. Seien $x, y \in [a,b]$.

1. Fall: $x \leq y$

$$\left|F(y) - F(x)\right| \underset{(1)}{=} \left|\int_x^y f(t)\ dt\right| \underset{10.24}{\leq} \int_x^y \left|f(t)\right|\ dt \ \leq\ \gamma \cdot (y - x) \ =\ \gamma \cdot |y - x|$$

D.h. $F$ ist LIPSCHITZ-stetig und damit stetig auf $[a,b]$.

2. Fall: $x > y$

$$\left|F(y) - F(x)\right| = \left|F(x) - F(y)\right| \underset{\text{Fall 1}}{\leq} \gamma \cdot |x - y| = \gamma \cdot |y - x|$$

D.h. $F$ ist LIPSCHITZ-stetig und damit stetig auf $[a,b]$.

(3) Sei $x_0 \in [a,b)$

Wir zeigen: $\lim\limits_{h \to 0+} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$

Sei $h > 0$ mit $x_0 + h \leq b$

Setze $\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| =: L(h)$

Bleibt zu zeigen: $L(h) \to 0$ für $h \to 0+$

Es ist

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \underset{(1)}{=} \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \quad \text{und} \quad f(x_0) = \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt$$

also:

$$\begin{aligned} L(h) &= \left|\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)-f(x_0)\,dt\right| = \frac{1}{h}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)-f(x_0)\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} \big|f(t)-f(x_0)\big|\,dt \end{aligned}$$

$f$ ist stetig in $x_0$. Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\big|f(t)-f(x_0)\big| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in U_\delta(x_0) \cap [a,b]$$

Für $0 < h < \delta$ gilt: $[x_0, x_0+h] \subset U_\delta(x_0) \cap [a,b]$, also

$$L(h) \leq \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,dt = \frac{1}{h}\cdot\varepsilon = \varepsilon$$

□

**Korollar 10.26.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ beliebiges Intervall und $f \in C(I)$. Es sei $x_0 \in I$ fest und $F : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Dann ist $F \in C^1(I)$ und $F' = f$ auf $I$.

**Beweis:** Sei $x_0 \in [a,b] \subset I$. Es reicht zu zeigen, dass $F' = f$ auf $[a,b]$.

Setze

$$G(x) := \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt\ , \quad x \in [a,b]$$

Nach 10.25 (3) ist $G' = f$ auf $[a,b]$

Nach 10.19 gilt:

$$\underbrace{\int\limits_{a}^{x_0} f(t)\,dt}_{=G(x_0)} + \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt}_{=F(x)} = \underbrace{\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt}_{=G(x)}\ , \quad x \in [a,b]$$

Also $F(x) = G(x) - \underbrace{G(x_0)}_{c}\ , \quad x \in [a,b]$

$\Rightarrow \quad F' = G' = f$ auf $[a,b]$ □

**Definition 10.27** (Schreibweise)**.** $I \subset \mathbb{R}$ beliebiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Besitzt $f$ auf $I$ eine Stammfunktion, so schreibt man für eine (und *jede*) solche Stammfunktion auch

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{(unbestimmtes Integral)}$$

*Vorsicht:* Besitzen $f, g$ Stammfunktionen, so ist die Schreibweise

$$\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$$

*nicht* als Gleichung zwischen Funktionen zu verstehen, da das unbestimmte Integral eine ganze *Klasse* von Funktionen bezeichnet.

**Beispiel 10.28.** $(c \in \mathbb{R})$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

## 10.3. Partielle Integration

**Satz 10.29.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g \in C^1(I)$

(1) $\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$ auf $I$

[ nach 10.26 besitzen $f' \cdot g$ und $f \cdot g'$ Stammfunktionen auf $I$ ]

(2) Ist $I = [a, b]$, so ist

$$\boxed{\int_a^b f'g\,dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b fg'\,dx}$$

[ nach 10.12 gilt $f'g, fg' \in \mathbb{R}[a, b]$ ]

**Beweis:** Nach der Produktregel gilt: $(fg)' = f'g + fg'$

(1) $f'g + fg'$ hat auf $I$ die Stammfunktion $fg \quad \Rightarrow \quad$ Behauptung

(2)

$$\int_a^b f'g\,dx + \int_a^b fg'\,dx = \int_a^b (f'g + fg')\,dx \underset{10.14}{=} \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b \quad \Rightarrow \quad \text{Behauptung}$$

□

**Beispiel 10.30.** ($c \in \mathbb{R}$)

(1)

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int \sin(x)\sin(x)\,dx = -\cos(x)\sin(x) - \int \big(-\cos(x)\big)\cos(x)\,dx \tag{10-iii}$$
$$= -\cos(x)\sin(x) + \int \cos(x)\cdot\cos(x)\,dx$$
$$= -\cos(x)\sin(x) + \sin(x)\cos(x) - \int \sin(x)\big(-\sin(x)\big)\,dx = \int \sin^2(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ hat nichts gebracht.

Mache bei (10-iii) anders weiter:

$$-\cos(x)\sin(x) + \int \underbrace{\cos^2(x)}_{1-\sin^2(x)}\,dx = x - \cos(x)\sin(x) - \int \sin^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int \sin^2(x)\,dx = x - \cos(x)\sin(x) + c$$

$$\Rightarrow \int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\big(x - \sin(x)\cos(x)\big) + c$$

(2)

$$\int \log(x)\,dx = \int \underbrace{1}_{=f'(x)} \cdot \underbrace{\log(x)}_{=g(x)}\,dx = x\log(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + c$$

(3)

$$\int \underbrace{x}_{f'(x)}\underbrace{e^x}_{g(x)}\,dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x\,dx$$

$\rightsquigarrow$ wird komplizierter.

$$\int \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{e^x}_{f'(x)}\,dx \;=\; x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx \;=\; x\cdot e^x - e^x + c$$

**Definition 10.31.** Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$.

$$\langle \alpha, \beta\rangle := \begin{cases} [\alpha,\beta] & \text{für } \alpha < \beta \\ [\beta,\alpha] & \text{für } \alpha > \beta \end{cases}$$

## 10.4. Integration durch Substitution

**Satz 10.32** (Substitutionsregel)**.** Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f \in C(I)$ und $g \in C^1(J)$

(1) $\int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\big|_{x=g(t)}$ auf $J$

(2) Ist $g'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$, so

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt\big|_{t=g^{-1}(x)}}$$

(3) Sei $I = \langle a, b\rangle$ und $J = \langle \alpha, \beta\rangle$ mit $g(\alpha) = a$ und $g(\beta) = b$

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt}$$

**Beweis:** Nach 10.26 hat $f$ auf $I$ eine Stammfunktion $F$.

Setze $h(t) := f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)$ und $G(t) := F\big(g(t)\big)$. Dann ist $G$ differenzierbar auf $J$ und

$$G'(t) = F'\big(g(t)\big) \cdot g'(t) = h(t)\ ,\quad t \in J \tag{10-iv}$$

(1)

$$\int h(t)\,dt \overset{(10\text{-iv})}{=} G(t) = F\big(g(t)\big) = F(x)\big|_{x=g(t)} = \int f(x)\,dx\big|_{x=g(t)}$$

(2)

$$\int h(t)\big|_{t=g^{-1}(x)} = G\big(g^{-1}(x)\big) = F\big(g(g^{-1}(x))\big) = F(x) = \int f(x)\,dx$$

(3)

$$\int\limits_\alpha^\beta h(t)\,dt \overset{(10\text{-iv})}{=} G(\beta) - G(\alpha) = F\big(g(\beta)\big) - F\big(g(\alpha)\big) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

□

**Merkregel:** Sei $y = y(x)$ eine differenzierbare Funktion von $x$. Dann schreibt man für $y'$ auch $\frac{dy}{dx}$.

Zu 10.32: Substituiere $x = g(t)$, fasse also $x$ als Funktion von $t$ auf.

$$\Rightarrow\ \frac{dx}{dt} = g'(t)$$

$$\text{„}\Rightarrow\text{“}\ \ dx = g'(t)\,dt$$

**Beispiel 10.33.**

(1)

$$\int\limits_1^2 \underbrace{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}_{=:f(x)}\,dx$$

$g$ so wählen, dass $f \circ g$ eine „einfache“ Form bekommt.

$$(x =)\ g(t) = \log t, \qquad \left(\frac{dx}{dt} =\right)\ g'(t) = \frac{1}{t}, \quad a = 1, b = 2 \ \Rightarrow\ \alpha = e, \beta = e^2$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{e^{2\log t}+1}{e^{2\log t}} \cdot \frac{1}{t}\,dt$$
$$= \int_e^{e^2} \frac{t^2+1}{t^3}\,dt = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\right)dt = \left[\log t - \frac{1}{2t^2}\right]_e^{e^2}$$

(2)

$$\int \frac{t+5}{t^2+10t+4}\,dt = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{g'(t)}{g(t)}}_{f(g(t))g'(t)}\,dt \text{ mit } g(t) = t^2+10t+4$$

für $f(x) = \frac{1}{x}$. Nach 10.32 gilt:

$$\int \frac{t+5}{t^2+10t+4}\,dt = \frac{1}{2}\int f(x)\,dx\Big|_{x=g(t)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx\Big|_{x=g(t)} = \frac{1}{2}\log(t^2+10t+4)$$

(3)

$$\int \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}_{=:f(x)}\,dx \qquad \text{auf } (0,1)$$

Substituiere $x = g(t) = \sin t \ \big(t \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)\big)$.

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = g'(t) = \cos t, \qquad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \big|\cos(t)\big|$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \cdot \cos(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = -\cos(t)\big|_{t=g^{-1}(x)} + c$$
$$= -\cos\big(\arcsin(x)\big) + c = -\sqrt{1-\sin^2\big(\arcsin(x)\big)} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$$

(4)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

(vgl. auch Abb. 10.5).

Substituiere $x = \sin(t)$, „ $dx = \cos(t)\,dt$“, $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2(t)}}_{=\cos(t)} \cdot \cos(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^2(t)}_{=1-\sin^2}\,dt$$
$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,dt = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{2}\big(t - \sin(t)\cos(t)\big)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

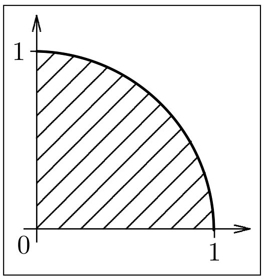



Abbildung 10.5.: Funktion zu 10.33 (4)

**Satz 10.34.**

(1) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $f$ habe höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen in $[a, b]$.

Dann gilt $f \in R[a, b]$.

(2) Sei $f \in R[a, b]$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Es gelte $f(x) \neq g(x)$ für höchstens endlich viele $x \in [a, b]$.

Dann gilt $g \in R[a, b]$ und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

(3) Ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (a, b)$ und $f \in R[a, b]$, so ist $g \in R[a, b]$, und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

**Beweis:**

zu (1): Es existiert $\gamma \geq 0$ mit

$$\forall x \in [a, b] \quad \left|f(x)\right| \leq \gamma$$

a) $f$ sei unstetig in genau einem $\xi \in [a, b]$ (vgl. Abb. 10.6)

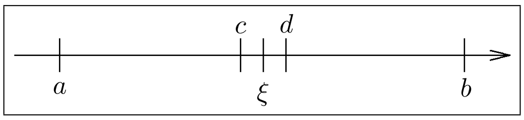



Abbildung 10.6.: Skizze zum Beweis von 10.34

- Sei $\xi \in (a, b)$, und sei $\varepsilon > 0$. Wähle $c \in (a, \xi)$, $d \in (\xi, b)$ mit $2\gamma(d - c) < \frac{\varepsilon}{3}$.

  $f$ stetig auf $[a, c]$ und auf $[d, b]$ $\Rightarrow$ $f \in R[a, c]$, $f \in R[d, b]$. $\underset{10.8}{\Longrightarrow}$ Es existieren Zerlegungen $Z_1$ von $[a, c]$, $Z_2$ von $[d, b]$ mit

$$S_f(Z_1) - s_f(Z_1) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad S_f(Z_2) - s_f(Z_2) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$Z := Z_1 \cup Z_2$ Zerlegung von $[a,b]$, und

$$\begin{aligned} S_f(Z) - s_f(Z) &= S_f(Z_1) - s_f(Z_1) + \Big(\overbrace{\sup f\big([c,d]\big)}^{\leq \gamma} - \overbrace{\inf f\big([c,d]\big)}^{\geq -\gamma}\Big) \cdot (d-c) \\ &\quad + S_f(Z_2) - s_f(Z_2) \\ &\leq \underbrace{S_f(Z_1) - s_f(Z_1)}_{\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{2\gamma(d-c)}_{\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{S_f(Z_2) - s_f(Z_2)}_{\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; f \in R[a,b]$$

- $\xi = a$ oder $\xi = b$: analog

b) $f$ habe endlich viele Unstetigkeitspunkte $\xi_1, \dots, \xi_p \in [a,b]$.

Wähle $\eta_1, \dots, \eta_{p-1} \in [a,b]$ mit

$$\eta_0 := a \leq \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \cdots < \eta_{p-1} < \xi_p \leq \eta_p := b$$

Für jedes Intervall $[\eta_{j-1}, \eta_j]$ gilt: $f$ hat in $[\eta_{j-1}, \eta]$ genau einen Unstetigkeitspunkt, nämlich $\xi_j$.

$$\underset{a)}{\Longrightarrow} \; f \in R[\eta_{j-1}, \eta_j] \text{ für alle } j = 1, \dots, p$$

$$\underset{10.19}{\Longrightarrow} \; f \in R[a,b]$$

zu (2): Setze $h := f - g$. $M$ sei die Menge der Punkte, in denen $f \neq g$ gilt. (höchstens endlich viele)

$\Rightarrow h = 0$ auf $[a,b] \setminus M$

$\Rightarrow h$ stetig auf $[a,b] \setminus M$, da $M$ endlich.

$\underset{(1)}{\Rightarrow} h \in R[a,b]$

$\Rightarrow g = f - h \in R[a,b]$

Noch zu zeigen:

$$\int_a^b h(x)\, dx = 0 \qquad \left(\Rightarrow \int_a^b g\, dx = \int_a^b f\, dx\right)$$

Nach 10.24 genügt es wegen

$$\left|\int_a^b h\, dx\right| \leq \int_a^b |h|\, dx$$

zu zeigen:

$$\int_a^b |h|\, dx = 0$$

Es gilt:

$$\big|h(\xi)\big| > 0 \text{ für } \xi \in M$$

$$|h| = 0 \text{ auf } [a,b] \setminus M$$

$$\underset{M \text{ endlich}}{\Longrightarrow} s_{|h|}(Z) = 0 \text{ für jede Zerlegung } Z \text{ von } [a,b]$$

$$s_{|h|} = 0 \quad \underset{|h| \in R[a,b]}{\Longrightarrow} \quad \int\limits_a^b |h| \, dx = 0$$

zu (3): Spezialfall von 2.

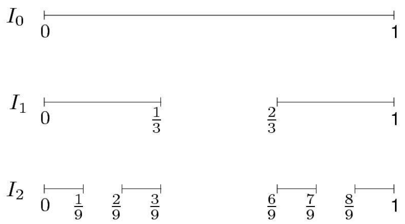
$\square$

**Beispiel 10.35.** Die CANTOR-*Menge* $C := \left\{ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k} \;:\; c_k \in \{0,2\} \text{ für alle } k \right\}$

Im Beweis zu Satz 5.6 haben wir gesehen, dass die Menge $M := \left\{ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \;:\; a_k \in \{0,1\} \right\}$ überabzählbar ist.

Also ist auch $C$ überabzählbar.

Eine andere Konstruktion von $C$:




Man erhält $I_{n+1}$ indem man aus jedem Intervall von $I_n$ das mittlere Drittel „herausschneidet".

Dann ist $C = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} I_k$

Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in C \\ 0 & \text{falls } x \notin C \end{cases}$ ist beschränkt

ebenso wie $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}, f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in I_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Nach 10.34 ist $f_k \in R[0,1]$

Da $f \leq f_k$ ist, gilt auch $S_f(Z) \leq S_{f_k}(Z)$ für eine Zerlegung $Z$.

$$S_f(Z) \leq S_{f_k}(Z) = \int\limits_0^1 f_k(x) \, dx = \underbrace{\frac{1}{3^k} \cdot 2^k}_{\substack{\text{Länge mal Anzahl} \\ \text{der Intervalle in } I_k}} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad S_f(Z) \leq 0$$

Da $f \geq 0$ folgt $s_f \geq 0$, also $S_f = s_f$

Damit ist $f \in R[a,b]$ und $\int_0^1 f(x) \, dx = 0$

## 10.5. Mittelwertsatz der Integralrechnung

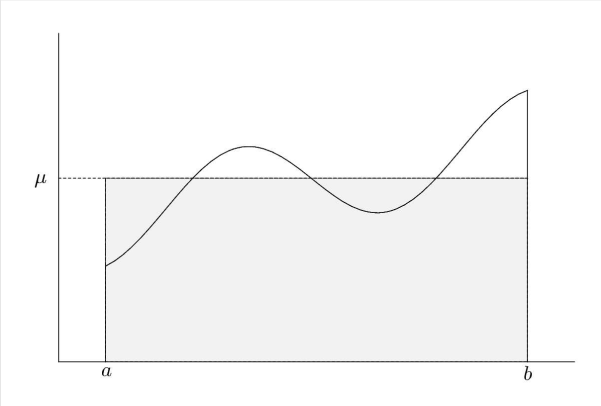
**Satz 10.36** (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** $f, g \in R[a,b]$, $g \geq 0$ auf $[a,b]$
Sei $m := \inf f\big([a,b]\big)$, $M := \sup f\big([a,b]\big)$. Dann existiert ein $\mu \in [m, M]$ mit

$$\int_a^b fg\, dx = \mu \int_a^b g\, dx$$

*Zusatz:* Ist $f \in C[a,b]$, so existiert $\xi \in [a,b]$ mit $\mu = f(\xi)$

Spezialfall: $g = 1$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mu \cdot (b-a)$$




**Beweis:** $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$

$$\underset{g \geq 0}{\Rightarrow} \quad m \cdot g \leq f \cdot g \leq M \cdot g \text{ auf } [a,b]$$

$$\Rightarrow \quad m \underbrace{\int_a^b g\, dx}_{=:A} \;\leq\; \underbrace{\int_a^b fg\, dx}_{=:B} \;\leq\; M \int_a^b g\, dx$$

Also: $mA \leq B \leq MA$

1. Fall: $A = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ wähle $\mu \in [m, M]$ beliebig

2. Fall: $A \neq 0 \quad$ da $A \geq 0$ folgt $A > 0$, also $m \leq \underbrace{\tfrac{B}{A}}_{=:\mu} \leq M$

$\square$

**Satz 10.37.** $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei Funktionenfolge mit

(i) $\big(f_n(a)\big)$ konvergiert

(ii) $(f_n')$ konvergiere auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$

Dann konvergiert $(f_n)$ auf $[a,b]$ gleichmäßig und für $f(x) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ , $\; x \in [a,b]$ gilt:

$$f \in C^1[a,b] \quad \text{und} \quad f' = g$$

Also:

$$\Big(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\Big)' = f'(x) = g(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x)$$

[ Vertauschen von Limes und Ableitung unter der Vorraussetzung gleichmäßiger Konvergenz der Ableitungen ]

**Beweis:** Nach 8.10 ist $g \in C[a,b] \underset{10.25}{\Rightarrow} G(x) := \int_a^x g(t)\ dt$ , $x \in [a,b]$ definiert eine Stammfunktion von $g$ auf $[a,b]$ und $G \in C^1[a,b]$

Für jedes $x \in [a,b]$ gilt:

$$f_n(x) - f_n(a) \underset{10.14}{=} \int\limits_a^x f_n'(t)\ dt \xrightarrow[10.21]{n\to\infty} \int\limits_a^x g(t)\ dt = G(x)$$

also

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} G(x) + \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(a)}_{=:c} \quad \text{für jedes } x \in [a,b]$$

also

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = G(x) + c \quad \text{für jedes } x \in [a,b]$$

$$\underset{G\in C^1}{\Rightarrow} \quad f \in C^1[a,b]\ ,\ \ f' = G' = g \quad \text{auf } [a,b]$$

Bleibt zu zeigen: $(f_n)$ konvergiert auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f$.

Für jedes $x \in [a,b]$ gilt:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(a)| &= \Bigg|\underbrace{f_n(x) - f_n(a)}_{=\int_a^x f_n'(t)\ dt} + f_n(a) - \underbrace{\underbrace{f(a)}_{=c} - \underbrace{\int\limits_a^x g(t)\ dt}_{G(x)}}_{-f(x)}\Bigg| \\
&= \left|\int\limits_a^x \big(f_n'(t) - g(t)\big)\ dt + f_n(a) - c\right| \\
&\le \int\limits_a^x \big|f_n'(t) - g(t)\big|\ dt + \big|f_n(a) - c\big| \\
&\le \underbrace{\int\limits_a^b \big|f_n'(t) - g(t)\big|\ dt}_{=:\alpha_n} + \underbrace{\big|f_n(a) - c\big|}_{=:\beta_n} =: \gamma_n
\end{aligned}$$

$\big(|f_n' - g|\big)$ konvergiert auf $[a,b)$ gleichmäßig gegen 0.

$$\underset{10.21}{\Rightarrow} \quad \alpha_n \to \int\limits_a^b dt = 0 \text{ für } n \to \infty$$

Außerdem: $\beta_n \to 0$ für $n \to \infty$ nach Definition von $c$

$\Rightarrow \quad \gamma_n \to 0$ für $n \to \infty$

Somit

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \le \gamma_n \quad \text{für alle } x \in [a,b], n \in \mathbb{N} \text{ und } \quad \gamma_n \to \infty$$

$\underset{8.5}{\Rightarrow}$ $(f_n)$ konvergiert auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f$ $\square$

**Beispiel 10.38.** $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ für $n \geq 4$

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos(nx) & \text{falls } x \in [0, \frac{\pi}{n}] \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann

$$f_n'(x) = \begin{cases} -n \cdot \sin(nx) & \text{falls } x \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $f_n'(x) \to 0$ für alle $x \in [0,1]$

Also: $(f_n')$ konvergiert punktweise aber $f$ in 0 nicht differenzierbar.

D.h.: In 10.37 ist die Vorraussetzung der gleichmäßig Konvergenz von $(f_n')$ wesentlich!

**Nachtrag:**

**Beweis:** zu Satz 9.28 (2)

Wähle kompaktes Intervall $[a,b] \subset I$ beliebig.

Setze

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k \quad (\text{für } x \in [a,b])$$

Dann

$$\forall x \in [a,b]\ \forall n \in \mathbb{N} \quad s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k (x - x_0)^{k-1} \xrightarrow{9.28} \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} =: g(x)$$

Ferner $(s_n(a))$ offenbar konvergent, da $a \in I$.

Nach 8.10 gilt $s_n' \to g$ gleichmäßig auf $[a,b]$.

$$\underset{10.37}{\Rightarrow} f \text{ differenzierbar auf } [a,b], \quad f' = g$$

Da $[a,b] \subset I$ beliebig, ist $f$ differenzierbar auf $I$, und $f' = g$ auf $I$.

$\Rightarrow$ Behauptung. $\square$

# 11. Partialbruchzerlegung

**Erinnerung:**

$z \in \mathbb{C}\,,\;\; z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$

*Beachte:* $i^2 = -1$

$\overline{z} := x - iy \qquad \overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}\,,\;\; \overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$

## 11.1. Fundamentalsatz der Algebra

**Satz 11.1** (Fundamentalsatz der Algebra)**.** Sei $p(z) = a_+ + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad (n \in \mathbb{N}\,,\;\; a_n \neq 0)$ ein Polynom mit *komplexen* Koeffizienten $(a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C})$, so existiert ein $m \leq n$ und $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ und $\nu_1, \ldots, \nu_m \in \mathbb{N}$ mit $z_j \neq z_k$ für $j \neq k$ und $\nu_1 + \cdots + \nu_m = n$ und

$$p(z) = a_n (z - z_1)^{\nu_1} \cdots (z - z_m)^{\nu_m} \tag{11-i}$$

[ Jedes Polynom vom Grad $n$ hat (mit Vielfachheiten) genau $n$ Nullstellen ]

$\nu_j$ ist Vielfachheit der Nullstelle $z_j$.

**Beispiel 11.2.**

(1) $p(z) = z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$

(2) $p(z) = iz^2 - (1+i)z^3 + z^4 = z^2(i - z - iz + z^2) = z^2(z-1)(z-i)$

also: $n = 4\,,\;\; m = 3\,,\;\; z_1 = 0\,,\;\; z_2 = 1\,,\;\; z_3 = i\,,\;\; \nu_1 = 2\,,\;\; \nu_2 = 1\,,\;\; \nu_3 = 1$

**Satz 11.3.** Sei $p$ wie in 11.1 aber $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Ist $z_0$ eine Nullstelle von $p$ mit der Vielfacheit $\nu$, so ist auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von $p$ mit der Vielfachheit $\nu$.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} 0 = \overline{0} = \overline{q(z_0)} &= \overline{a_0 + a_1 z_0 + \cdots + a_n z_0^n} \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z_0} + \cdots + \overline{a_n} \cdot \overline{z_0}^n \\ &= a_0 + a_1 \overline{z_0} + \cdots + a_n \overline{z_n}^n \\ &= q(\overline{\alpha_j}) \end{aligned}$$

$\square$

Sei $p$ wie in 11.3 und $z_0 = x_0 + iy_0\;,\quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von $p$ mit $y_0 \neq 0$ (d.h. $z_0 \notin \mathbb{R}$).

Dann gilt:

$$\begin{aligned}(z-z_0)(z-\overline{z_0}) &= z^2 - z(z_0+\overline{z_0}) + z_0\cdot\overline{z_0}\\ &= z^2 - 2x_0 z + x_0^2 + y_0^2\\ &= z^2 + 2bz + c\end{aligned}$$

mit $b := -x_0$ und $c := x_0^2 + y_0^2$ wobei $c - b^2 = x_0^2 + y_0^2 - x_0^2 = y_0^2 > 0$

Also hat das Polynom $x^2 + 2bx + c$ in $\mathbb{R}$ *keine* Nullstelle.

Es ist $(z-z_0)^\nu(z-\overline{z_0})^\nu = (z^2+2bz+c)^\nu$

**Vereinbarung**

Im folgenden seien alle vorkommenden Polynome $(p, q, h)$ *reelle* Polynome mit *reellen* Koeffizienten. Dabei sei stets:

$$q(x) := a_0 + \cdots + a_n x^n\ ,\quad a_n \neq 0$$

**Satz 11.4.** Sei $q$ wie oben. $x_1, \ldots, x_M$ seien die *verschiedenen* Nullstellen von $q$ in $\mathbb{R}$ ($M = 0$, falls $q$ keine reellen Nullstellen hat). Dann hat $q$ eine Darstellung der Form

$$q(x) = a_n \prod_{j=1}^{M}(x-x_j)^{\nu_j} \prod_{j=1}^{L}\left(x^2 + 2b_j x + c_j\right)^{\mu_j},$$

wobei $\nu_j, \mu_j \in \mathbb{N}$ , $b_j, c_j \in \mathbb{R}$ , $c_j - b_j^2 > 0$ und $\nu_1 + \cdots + \nu_M + 2\mu_1 + 2\mu_L = n$.

Dabei gelte $\prod_{j=1}^{0}(x-x_j)^{\nu_j} := 1$

**Satz 11.5** (Division mit Rest)**.**

Seien $P, q$ Polynome mit Grad $P \geq$ Grad $q$. Dann existieren Polynome $p, h$ mit:

$$\frac{P}{q} = h + \frac{p}{q} \quad \text{und Grad } p \leq \text{ Grad } q$$

**Beispiel 11.6.** Sei $P(x) := 2x^3 - x^2 - 10x + 19$ und $q(x) := x^2 + x - 6$. Division mit Rest:

$$\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{2x^3 - x^2 - 10x + 19}{x^2 + x - 6} = \underbrace{2x-3}_{h(x)} + \frac{\overbrace{5x+1}^{p(x)}}{x^2+x-6}$$

**Definition 11.7.**

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &:= \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } p(x) = ax + b\}\\ &= \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \text{ Polynom, Grad } p \leq 1\}\end{aligned}$$

**Satz 11.8** (Partialbruchzerlegung)**.** Es seien $p, q$ Polynome, Grad $p <$ Grad $q$, und $q$ habe die Darstellung wie in 11.4. Dann:

$$\begin{aligned}
\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{a_{11}}{x-x_1} + \frac{a_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1,\nu_1}}{(x-x_1)^{\nu_1}} \\
&+ \frac{a_{21}}{x-x_2} + \cdots + \frac{a_{2,\nu_2}}{(x-x_2)^{\nu_2}} \\
&\vdots \\
&+ \frac{a_{M1}}{x-x_M} + \cdots + \frac{a_{M,\nu_M}}{(x-x_M)^{\nu_M}} \\
&+ \frac{f_{11}}{x^2+2b_1x+c_1} + \cdots + \frac{f_{1,\mu_1}}{(x^2+2b_1x+c_1)^{\mu_1}} \\
&\vdots \\
&+ \frac{f_{L1}}{x^2+2b_Lx+c_L} + \cdots + \frac{f_{L,\mu_L}}{(x^2+2b_Lx+c_L)^{\mu_L}}
\end{aligned}$$

wobei $a_{jk} \in \mathbb{R}$ , $f_{jk} \in \mathcal{L}$.

**Beispiel 11.9.**

$$\frac{x+2}{x^2(x-1)(x^2+1)} \stackrel{!}{=} \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{\alpha x+\beta}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad x+2 = ax(x-1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1) + cx^2(x^2+1) + (\alpha x+\beta)x^2(x-1)$$

Indem man zunächst für $x$ „geschickt“ gewählte Werte annimt, lassen sich einige Unbekannte direkt ablesen:

$$\begin{aligned}
&x = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -2 \\
&x = 1 \quad \Rightarrow \quad 3 = 2c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Die verbliebenen Unbekannten lassen sich durch Koeffizientenvergleich ermitteln:

$$\left.\begin{array}{rrr}
x^4: & a+\alpha = & -\frac{3}{2} \\
x^3: & -a+\beta-\alpha = & 2 \\
x^2: & a-\beta = & -\frac{7}{2} \\
x: & -a = & 3
\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a = -3\ , \quad \alpha = \frac{3}{2}\ , \quad \beta = \frac{1}{2}$$

also:

$$\frac{x+2}{x^2(x-1)(x^2+1)} = -\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

# 12. Integration rationaler Funktionen

Wegen obigem Abschnitt kann die Integration rationaler Funktionen

$$\frac{P(x)}{q(x)} \quad (P, q \text{ reelle Polynome mit reellen Koeffizienten})$$

auf folgende Ausdrücke zurückgeführt werden:

$$\int x^k \, dx \; , \quad \int \frac{1}{(x-a)^{k+1}} \, dx \text{ und } \int \frac{Ax+B}{(x^2+2bx+c)^{k+1}} \, dx,$$

wobei

$$k \in \mathbb{N} \; , \quad a, b, c, A, B \in \mathbb{R} \text{ und } c - b^2 > 0.$$

Im folgenden sei $p(x) = x^2 + 2bx + c$.
Dann: $p'(x) = 2x + 2b$

Die Integration der ersten beiden Ausdrücke lässt sich mit bekannten Mitteln durchführen:

**12.1.**

$$\int x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

**12.2.**

$$\int \frac{1}{(x-a)^{k+1}} = \begin{cases} \log|x-a| & \text{falls } k = 0 \\ -\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(x-a)^k} & \text{falls } k \geq 1 \end{cases}$$

Für den dritten Ausdruck nehmen wir zunächst einige Umformungen vor:

$$\begin{aligned} Ax + B &= Ax + Ab + B - Ab = \frac{A}{2} \cdot (2x + 2b) + B - Ab \\ &= \frac{A}{2} \cdot p'(x) + B - Ab \end{aligned}$$

also

$$\int \frac{Ax+B}{p(x)^{k+1}} \, dx = \frac{A}{2} \int \frac{p'(x)}{p(x)^{k+1}} \, dx + (B - Ab) \int \frac{1}{p(x)^{k+1}} \, dx$$

**12.3.**

$$\int \frac{p'(x)}{p(x)^{k+1}} \, dx = \begin{cases} \log|p(x)| & \text{falls } k = 0 \\ -\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{p(x)^k} & \text{falls } k \geq 1 \end{cases}$$

**12.4.**

$$\begin{aligned}
p(x) &= x^2 + 2bx + c = x^2 + 2bx + b^2 + \underbrace{c - b^2}_{=:\gamma>0} \\
&= (x+b)^2 + \gamma \\
&= \gamma \cdot \left( \left( \frac{x+b}{\sqrt{\gamma}} \right)^2 + 1 \right) \qquad \text{und } \gamma > 0
\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{p(x)^{k+1}}\, dx = \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma^{k+1}} \cdot \int \frac{1}{(t^2+1)^{k+1}}\, dt \qquad t = \frac{x+b}{\sqrt{\gamma}}\ , \quad dt = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\, dx$$

Setze

$$I_{k+1}(t) := \int \frac{1}{(t^2+1)^{k+1}}\, dt\ , \quad k \in \mathbb{N}_0$$

**12.5.**

Klar: $I_1(t) = \arctan t$

Sei $k \geq 1$. Dann:

$$\begin{aligned}
I_k &= \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\frac{1}{(t^2+1)^k}}_{g}\, dt = \frac{t}{(t^2+1)^k} - \int \frac{t \cdot 2t(-k)}{(t^2+1)^{k+1}}\, dt \\
&= \frac{1}{(t^2+1)^k} + 2k \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{k+1}}\, dt \\
&= \frac{1}{(t^2+1)^k} + 2k \int \frac{1}{(t^2+1)^k} - \frac{1}{(t^2+1)^{k+1}}\, dt \\
&= \frac{1}{(t^2+1)^k} + 2k \left( I_k(t) + I_{k+1}(t) \right)
\end{aligned}$$

Also

$$\boxed{I_{k+1} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{t}{(t^2+1)^k} + \left( 1 - \frac{1}{2k} \right) I_k(t) \quad k \geq 1}$$

**Beispiel 12.6.** $p(x) = x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$

Substituiere $t = x + 2$ ($\gamma = 1$, $b = 2$)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{p(x)^2}\, dx = I_2(t) &= \frac{1}{2} \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2} \arctan t \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{x+2}{x^2+4x+5} + \arctan(x+2) \right]
\end{aligned}$$

**Beispiel 12.7.**

$$\int \underbrace{\frac{3x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 7x + 6}{(x-1)^2(x^2+1)^2}}_{=:R(x)} \, dx$$

Zunächst formen wir $R$ durch Partialbruchzerlegung um:

$$R(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{4}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \int R(x)\, dx = \log|x-1| - \frac{2}{x-1} + \int \frac{2x+1}{x^2+1}\, dx + 4 \cdot \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx$$

(i) $$\int \frac{2x+1}{x^2+1}\, dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \log(x^2+1) + \arctan(x) + c$$

(ii) $$4 \cdot \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx \underset{12.5}{=} \frac{2x}{x^2+1} + 2\arctan(x) + c \qquad \text{(Vorgehen analog zu vorigem Beispiel)}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int R(x)\, dx = \log|x-1| - \frac{2}{x-1} + \log\left(x^2+1\right) + \frac{2x}{x^2+1} + 3\arctan(x) + c$$

# 13. Explizite Integration weiterer Funktionenklassen

**13.1.** Sei $R$ eine rationale Funktion, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann läßt sich

$$\int R\left(e^{a \cdot x}\right)\, dx$$

durch die Substitution $t = e^{ax}$ (also $x = \frac{1}{a} \log t$, also $dx = \frac{1}{at}\, dt$) zurückführen auf

$$\int R(t) \cdot \frac{1}{at}\, dt \quad \rightsquigarrow \quad \text{gebrochen rationale Funktion zu integrieren}$$

**Beispiel 13.2.**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\cosh(x)}\, dx &= \int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx \\
&\underset{t=e^x}{=} \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{1}{t^2+1}\, dt \\
&= \arctan(e^x) + c
\end{aligned}$$

**13.3.** Sei $R(x,y)$ eine rationale Funktion in $x$ und $y$, etwa: $R(x,y) = \frac{x^2y+2xy-y^3}{xy-x^3y+y}$.

Dann läßt sich

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\, dx$$

durch die Substitution $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ zurückführen auf die Integration einer rationalen Funktion.

**Beispiel 13.4.**

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\, dx \qquad \left(R(x,\ y) = \frac{1-y}{x+y}\ ,\ \text{ also: } a = d = 1\ ,\ \ b = c = 0\right)$$

Substituiere: $\quad t = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x = t^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2t\, dt$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \int \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\, dx &= \int \frac{1-t}{t^2+t} \cdot 2t\, dt = 2 \int \frac{1-t}{1+t}\, dt \\
&= 2 \cdot \int \left(-1 + \frac{2}{1+t}\right)\, dt \ = \ -2t + 4\log|1+t| + c \\
&= -2\sqrt{x} + 4\log\bigl(1+\sqrt{x}\bigr) + c
\end{aligned}$$

**13.5.** $R$ wie in 13.3. Das Integral

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\ dx$$

kann durch die Substition $x = 2\arctan(t)$ ($\Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt$) auf die Integration einer rationalen Funktion zurückgeführt werden; dazu benutze:

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= 2\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \\
&= \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}$$

$$\cos(x) = \cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \int R(\sin x,\ \cos x)\ dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\ dt$$

**Beispiel 13.6.**

(1)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos(x)}\ dx &= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\ dt \\
&= 2\int \frac{1}{1-t^2}\ dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)\ dt \\
&= \log|1+t| - \log|t-1| + c = \log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c = \log\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1}\right| + c
\end{aligned}$$

(2)

$$\int \frac{1}{\sin(x)} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\ dt = \log|t| = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

Für die folgenden Substitutionen beachte:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\ ,\quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

**13.7.** Das Integral

$$\int R\left(x,\ \sqrt{x^2+a^2}\right)\ dx$$

kann durch die Substitution $x = a \cdot \sinh t$ auf den in 13.1 behandelten Fall zurückgeführt werden.

**Beispiel 13.8.**

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\ dx$$

Substituiere: $\quad x = \sinh t \quad \Rightarrow \quad dx = \cosh t\ dt\ ,\quad x^2+1 = \sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\ dx = \int \frac{\cosh t}{\sinh t} \cdot \cosh t\ dt = \int \frac{(e^t+e^{-t})^2}{2(e^t-e^{-t})}\ dt \quad \rightsquigarrow \quad 13.1$$

**13.9.** Das Integral

$$\int R\left(x,\ \sqrt{x^2-a^2}\right)\ dx$$

kann durch die Substitution $x = a \cdot \cosh t$ auf den in 13.1 behandelten Fall zurückgeführt werden.

**13.10.** Das Integral

$$\int R\left(x,\ \sqrt{a^2-x^2}\right)\ dx$$

kann durch die Substitution $x = a \cdot sint$ auf den in 13.5 behandelten Fall zurückgeführt werden.

**13.11.** Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ , $a \neq 0$ , $b^2 \neq 4ac \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c$ hat keine doppelte Nullstelle [ d.h. ist *nicht* von der Form $a(x-\alpha)^2$ ].

Dann

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) &= a\Big(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\underbrace{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}_{=:\eta\neq 0}\Big) \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\eta\right] \qquad \text{(quadratische Ergänzung)} \end{aligned}$$

Ferner sei $R$ wie in 13.3. Dann läßt sich das Integral

$$\int R(x,\ \sqrt{x^2+bx+c})\ dx$$

durch die Substitution

$$t = \frac{1}{\sqrt{|\eta|}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

überführen in

(1)

$$\int \tilde{R}\left(t,\ \sqrt{t^2+1}\right)\ dt \qquad \text{(falls } a>0,\ \eta>0) \quad \rightsquigarrow \quad 13.7$$

*oder*

(2)

$$\int \tilde{R}\left(t,\ \sqrt{t^2-1}\right)\ dt \qquad \text{(falls } a>0,\ \eta<0) \quad \rightsquigarrow \quad 13.9$$

*oder*

(3)

$$\int \tilde{R}\left(t,\ \sqrt{1-t^2}\right)\ dt \qquad \text{(falls } a<0,\ \eta<0) \quad \rightsquigarrow \quad 13.10$$

(Der Fall $a<0,\ \eta>0$ liefert $ax^2+bx+c<0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ *nirgends* definiert.)

**Beispiel 13.12.**

$$\int \sqrt{x^2+4x+5}\,dx = \int \sqrt{(x+2)^2+1}\,dx$$

Substitution $t = x+2$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{x^2+4x+5}\,dx = \int \sqrt{t^2+1}\,dt$$

Substitution $t = \sinh(s) \quad \Rightarrow \quad dt = \cosh(s)\,ds$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \int \sqrt{x^2+4x+5}\,dx &= \int \sqrt{\sinh^2(s)+1}\cdot\cosh(s)\,ds = \int \cosh^2(s)\,ds \\
&= \frac{1}{4}\int \left(e^{2s}+2+2^{-2s}\right)\,dx = \frac{1}{8}e^{2s}+\frac{1}{2}s-\frac{1}{8}e^{-2s}+c
\end{aligned}$$

$$\left[t = \sinh(s) \ \Rightarrow \ s = \operatorname{arsinh}(t) = \log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^2 + \frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{t^2+1}\right) - \frac{1}{8}\left(t-\sqrt{t^2+1}\right)^{-2} + c \\
&= \frac{1}{8}\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right)^2 + \frac{1}{2}\log\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right) \\
&\quad - \frac{1}{8}\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right)^{-2} + c
\end{aligned}$$

# 14. Uneigentliche Integrale

**Motivation:**

$f$ integrierbar über $[a,b] \;\Rightarrow\; f$ beschränkt, $[a,b]$ kompakt
Erweiterung für

- Intervalle $(a,b]$, $[a,b)$, $(a,b)$ oder auch unbeschränkt
- $f$ „unbeschränkt am Rand“

**Bemerkung:**

Ist $f$ integrierbar über $[a,b]$, so gilt nach Kapitel 10:

$$\lim_{r \to b-} \int_a^r f \, dx = \int_a^b f \, dx$$

**Vereinbarung:**

(1) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so sei stets $f$ integrierbar über jedem Teilintervall von $I$.

(2) Es seit stets $a, b \in \mathbb{R}$ , $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\alpha < \beta$ und $a < b$

**Definition 14.1.** Sei $f : [a,\beta) \to \mathbb{R}$ $[f : (\alpha, b] \to \mathbb{R}]$ eine Funktion. Dann definieren wir:

Das *uneigentliche Integral* $\int_a^\beta f(x)\,dx$ $\left[\int_\alpha^b f(x)\,dx\right]$ heißt konvergent

$$:\Leftrightarrow \quad \lim_{r \to \beta-} \int_a^r f(x)\,dx \quad \left[\lim_{r \to \alpha+} \int_r^b f(x)\,dx\right] \quad \text{existiert und ist aus } \mathbb{R}$$

In diesem Fall setze:

$$\int_a^\beta f(x)\,dx := \lim_{r \to \beta-} \int_a^r f(x)\,dx \quad \left[\int_\alpha^b f(x)\,dx := \lim_{r \to \alpha+} \int_r^b f(x)\,dx\right]$$

Ein nicht konvergentes uneigentliches Integral heißt *divergent*.

**Beispiel 14.2.**

(1) Sei $\alpha > 0$, $t > 1$.

$$\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \log t & \text{für } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}(t^{1-\alpha} - 1) & \text{für } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \left( \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \, dx \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1 \right)$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \, dx \text{ konvergiert} \;\Leftrightarrow\; \alpha < 1 \quad (\text{falls } \alpha > 0)$$

(3)

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(t) \xrightarrow{t \to \infty} \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \, dx \text{ ist konvergent und } = \frac{\pi}{2}$$

(4) Analog zu 4.

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} \, dx \text{ ist konvergent und } = \frac{\pi}{2}$$

**Definition 14.3.** Sei $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Das uneigentliche Integral $\int_\alpha^\beta f(x) \, dx$ heißt *konvergent*

$$:\Leftrightarrow \quad \exists c \in (\alpha, \beta) \quad \int_\alpha^c f \, dx \text{ und } \int_c^\beta f \, dx \text{ konvergent.}$$

In diesem Fall setze:

$$\int_\alpha^\beta f \, dx := \int_\alpha^c f \, dx + \int_c^\beta f \, dx.$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl von $c$ ab.

**Beispiel 14.4** (zur Warnung)**.**

$$\int_{-\infty}^\infty x \, dx \quad \text{divergiert, da} \quad \int_0^\infty x \, dx \quad \text{divergiert}$$

Aber:

$$\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^r x \, dx = 0$$

**Beispiel 14.5** (weitere Beispiele)**.**

(1) Sei $\alpha > 0$. Nach Beispiel (1) und (2) weiter oben ist

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{divergent}$$

(2) Nach Beispiel (3) und (4) weiter oben konvergiert

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad \text{und ist gleich } \pi$$

Die folgenden Sätze und Definitionen werden nur für Funktionen $f : [a, \beta) \to \mathbb{R}$ formuliert. ($\beta$ ist „singulärer“ Punkt.) Sie gelten sinngemäß auch für die anderen beiden Typen uneigentlicher Integrale. Setze stets voraus:

$$\forall t \in (a, \beta) \quad f \in R[a, t]$$

## 14.1. Konvergenzkriterien

**Satz 14.6** (Cauchy–Kriterium)**.**

$$\int_a^\beta f(x)\,dx \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists c = c(\varepsilon) \in (a, \beta)\ \forall u, v \in (c, \beta) \quad \left| \int_u^v f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

**Beweis:** Folgt aus 6.7, angewendet auf

$$\phi(t) := \int_a^t f(x)\,dx$$

□

**Beispiel 14.7.** *Behauptung:*

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \text{ ist konvergent}$$

(Beachte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$; also ist nur $\infty$ „singulär“.)

**Beweis:** Für alle $0 < u < v$ gilt:

$$\left| \int_u^v \frac{\sin(x)}{x}\,dx \right| = \left| \int_u^v \underbrace{\frac{1}{x}}_{=:g} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{=:f'}\,dx \right| = \left| \left[ -\frac{1}{x}\cos(x) \right]_u^v - \int_u^v \frac{1}{x^2} \cos x\,dx \right|$$

$$\leq \left| \frac{\cos(v)}{v} - \frac{\cos(u)}{u} \right| + \int_u^v \frac{1}{x^2} \underbrace{|\cos(x)|}_{\leq 1}\,dx \leq \frac{1}{v} + \frac{1}{u} + \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right) = \frac{2}{u}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$; wähle $c := \frac{2}{\varepsilon}$. Dann gilt für $0 < u < v$ mit $u > c$:

$$\left| \int_u^v \frac{\sin(x)}{x}\, dx \right| \le \frac{2}{u} < \frac{2}{c} = \varepsilon$$

Nach 14.6 folgt die Behauptung. □

**Definition 14.8.** $\int_a^b f(x)\, dx$ heißt *absolut konvergent*

$$:\Leftrightarrow \quad \int_a^\beta \left|f(x)\right|\, dx \quad \text{konvergiert.}$$

**Beispiel 14.9.** $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ konvergiert nicht absolut, denn $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ konvergiert nicht.

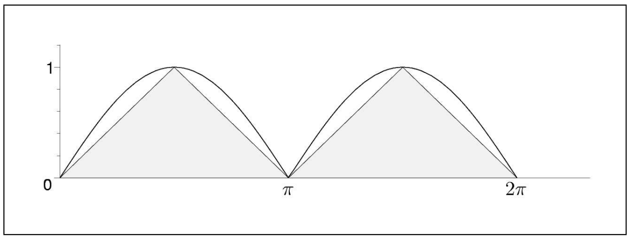



Abbildung 14.1.: Skizze zur Abschätzung im Beispiel 14.9

$$\int_0^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{j=1}^{k} \int_{(j-1)\pi}^{j\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$$

Abschätzung mit Dreiecksfläche (vgl. 14.1): $A = \frac{\pi}{2}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ (für die Funktion $|\sin(x)|$). Wegen Faktor $\frac{1}{x}$ in der ursprünglichen Funktion Abschätzung der Dreiecksfläche nach unten mit Faktor $\frac{1}{j\cdot\pi}$, dem Wert von $\frac{1}{x}$ jeweils am rechten Rand eines Intervalls.

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \int_{(j-1)\pi}^{j\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \ge \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j\cdot\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$$

**Satz 14.10.** Ist $\int_a^\beta f(x)\, dx$ absolut konvergent, so ist es auch konvergent, und

$$\left| \int_a^\beta f(x)\, dx \right| \le \int_a^\beta \left|f(x)\right|\, dx$$

**Beweis:** Mit 14.6, analog zum entsprechenden Beweis bei Reihen. □

Für das folgende wird benötigt:

$$\int_a^\beta f(x)\, dx \text{ konvergent} \quad \Rightarrow \quad \exists c \in (a,\beta) \quad \int_c^\beta f(x)\, dx \text{ konvergent}$$

In diesem Fall:

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx$$

(Beweis selbst)

**Satz 14.11.**

(1) **Majorantenkriterium**: Es sei $g : [a, \beta) \to \mathbb{R}$ mit $\forall t \in (a, \beta)\ g \in R[a, t]$ und es gelte

$$\forall x \in [a, \beta) \quad |f(x)| \leq g(x).$$

Ferner sei $\int_a^\beta g(x)\,dx$ konvergent.

Dann ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ absolut konvergent, und

$$\int_a^\beta |f(x)|\,dx \leq \int_a^\beta g(x)\,dx$$

(2) **Minorantenkriterium**: $g$ wie oben, jetzt aber

$$\forall x \in [a, \beta) \quad f(x) \geq g(x) \geq 0$$

Ferner sei $\int_a^\beta g(x)\,dx$ divergent.

Dann ist auch $\int_a^\beta f(x)\,dx$ divergent.

**Beweis:** Mit 14.6, analog zum entsprechenden Satz bei Reihen. □

**Beispiel 14.12.**

(1)

$$\int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+x^5}}}_{=:f(x)}\,dx \text{ konvergent?}$$

Es gilt

$$\forall x \in [1, \infty) \quad \big|f(x)\big| \leq \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} =: g(x)$$

Da $\frac{3}{2} > 1$, ist $\int_1^\infty g(x)\,dx$ konvergent.

$$\underset{14.11}{\Rightarrow} \int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}\,dx \text{ konvergent und } \int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx = 2$$

(2)

$$\int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{x^2+7\sqrt{x}}}_{=:f(x)}\,dx \text{ konvergent?}$$

Es gilt

$$x \cdot f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 7\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 1$$

$$\Rightarrow \quad \exists c \in (0,\infty)\ \forall x \geq c: \quad x \cdot f(x) \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \geq c: \quad f(x) \geq \frac{1}{2x} =: g(x)$$

Da $\int_1^\infty g(x)\ dx$ divergent, ist nach 14.11 $\int_1^\infty f(x)\ dx$ divergent.

**Bemerkung 14.13.**

(1) Sei nun $b \in \mathbb{R}$ (also *nicht* $b = +\infty$) und $f \in R[a,b]$, d.h. $\int_a^b f(x)\ dx$ existiert im Riemannschen Sinne (als „eigentliches“ Integral)

Setze

$$F(x) := \int_a^x f(t)\ dt \text{ für } x \in [a,b]$$

Nach dem 2. Hauptsatz ist $F$ Lipschitz–stetig, also stetig, insbesondere stetig in $b$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^t f(x)\ dx = F(t) \xrightarrow{t\to b-} F(b) = \int_a^b f(x)\ dx \text{ (im Riemannschen Sinne)}$$

$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\ dx$ konvergiert als uneigentliches Integral, und der Wert ist gleich dem (eigentlichen) Riemannschen Integral.

(2) Sei $V$ die Menge aller $f : [a,\beta) \to \mathbb{R}$, derart dass $\int_a^\beta f(x)\ dx$ konvergiert. Dann ist $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und die Abbildung

$$V \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^\beta f(x)\ dx$$

ist *linear.*

(3) Sei $V$ wie in (2); i.a. gilt für $f, g \in V$ *nicht* $f \cdot g \in V$.

**Beispiel:**

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad [a,b] = [0,1]$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx \text{ konvergent, da } \frac{1}{2} < 1, \text{ d.h. } f = g \in V$$

aber:

$$\int_0^1 (f \cdot g)(x)\ dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\ dx \text{ divergent}$$

**Satz 14.14** (Integralkriterium)**.** Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $\forall x \in [1, \infty)\ f(x) > 0$ und $f$ monoton fallend. ($\Rightarrow\ f \in R[1, t]$ für alle $t > 1$)

Dann gilt:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konvergent } \Leftrightarrow \sum_{k=1}^\infty f(k) \text{ konvergent}$$

**Beweis:**

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in [k,\ k+1] \quad f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$$

$$\Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\int_k^{k+1} f(x)\,dx}_{=f(k)} \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq \underbrace{\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx}_{=f(k+1)}$$

$$\overset{\text{Summation}}{\Longrightarrow} \quad \sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \geq \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \tag{14-i}$$

Ist nun $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergent, so ist

$$\left( \int_1^{n+1} f(x)\,dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

beschränkt; nach (14-i) ist also

$$\left( \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

beschränkt.

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty f(k) \text{ konvergent}$$

Sei umgekehrt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent.

$$\underset{\text{(14-i)}}{\Longrightarrow} \quad \left( \int_1^{n+1} f(x)\,dx \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{beschränkt}$$

Ferner ist diese Folge monoton wachsend (da $f > 0$), also konvergent.

$$\Rightarrow \quad \text{Es existiert } \lim_{n \to \infty} \int_1^n f(x)\,dx$$

Ferner ist $\int_1^t f(x)\,dx$ monoton wachsend als Funktion von $t$.

$$\Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,dx \text{ existiert}$$

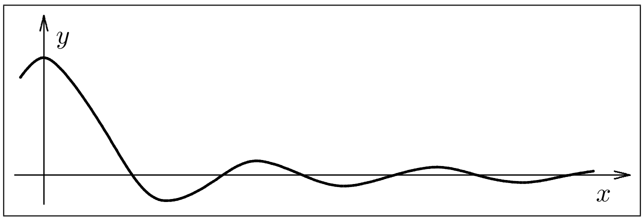
$$\Rightarrow \quad \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konvergent}$$

$\square$

**Beispiel 14.15.**

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(vgl. Abbildung rechts)




Verlauf von $\frac{\sin(x)}{x}$

# 15. Komplexe Exponential–, Sinus– und Cosinusfunktion

**Definition 15.1.** Die komplexe Exponentialfunktion $E(z) = e^z$ ist für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) definiert durch

$$e^z := e^x \cdot \big(\cos(y) + i\sin(y)\big)$$

**Bemerkung 15.2.**

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

Die Additionstheoreme für die *reellen* Sinus–, Cosinus–, Exponentialfunktion liefern

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \quad e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

**Beweis:** Mit $w = u + iv$ und $z = x + iy$ ist

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{(x+u)+i(y+v)} = e^{x+u} \cdot \big(\cos(y+v) + i\sin(y+v)\big) \\ &= e^x e^u \big(\cos(y)\cos(v) - \sin(y)\sin(v) + i(\sin(y)\cos(v) + \cos(y)\sin(v))\big) \\ &= e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \cdot e^u(\cos(v) + i\sin(v)) \\ &= e^z \cdot e^w \end{aligned}$$

□

Ist $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, d.h. $z = x + i \cdot 0$, so gilt

$$e^z = e^x \cdot \big(\cos(0) + i \cdot \sin(0)\big) = e^x$$

Die komplexe $e$-Funktion liefert also eine *Fortsetzung* der reellen $e$-Funktion ins Komplexe.

Ist $z$ *rein imaginär*, d.h. $z = 0 + i \cdot y$ mit $y \in \mathbb{R}$, so gilt

$$e^z = e^{iy} = e^0\big(\cos(y) + i \cdot \sin(y)\big)$$

d.h.

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R} \quad e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)}$$

**Erinnerung:** Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) ist der *Betrag* von $z$ definiert durch

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

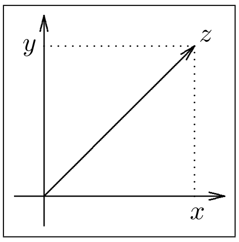



Abbildung 15.1.: Betrag von $z$

(Siehe auch Abb. 15.1)

Für $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left|e^{i\varphi}\right| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2} = 1$$

Speziell $\varphi := \pi$:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

(vgl. Abb. 15.2)

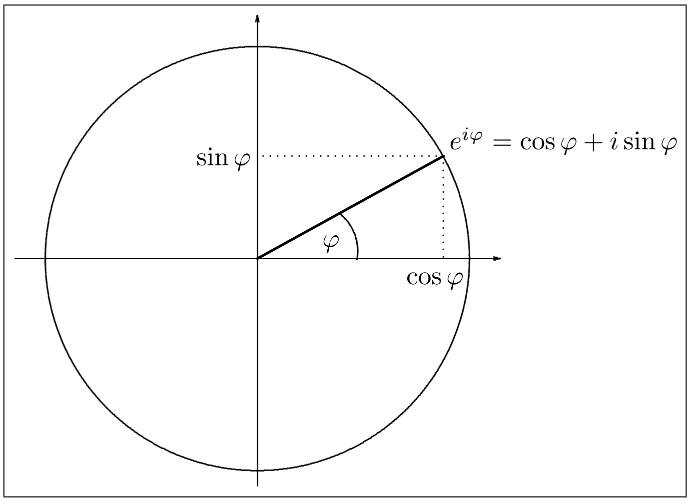



Abbildung 15.2.: Polarkoordinaten–Darstellung

**Korollar 15.3.**

(1) $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

(2) $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$ $(\varphi \in \mathbb{R})$

(3) $\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$ $(\varphi \in \mathbb{R})$

(4) $e^{z+2\pi ik} = e^z$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ (d.h. die komplexe $e$-Funktion ist $2\pi$-periodisch).

**Beweis:**

$$\overline{e^{i\varphi}} = \overline{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}$$

$$
\begin{aligned}
e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos\varphi - i\sin\varphi) = 2\cos\varphi \\
e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi) - (\cos\varphi - i\sin\varphi) = 2i\sin\varphi \\
e^{z+2\pi ik} &= e^z \cdot e^{i2\pi k} = e^z \cdot \big(\underbrace{\cos(2\pi k)}_{=1} + i\underbrace{\sin(2\pi k)}_{=0}\big) = e^z
\end{aligned}
$$

□

**Definition 15.4.** Für $z \in \mathbb{C}$ definiere

$$\cos z := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$\sin z := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

(Dies ist nach 15.3 die Fortsetzung der reellen Cosinus– bzw. Sinus–Funktion ins Komplexe.)

Eigenschaften:

(1) Seien $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

(2) Für $z = x + iy$ gilt:

$$\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

$$\sin(z) = \cos(x)\sinh(y) + i\sin(x)\cosh(y)$$

(3) Sei $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\cos(iy) = \frac{1}{2}\big(e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}\big) = \frac{1}{2}\big(e^{-y} + e^{y}\big) = \cosh(y)$$

$$\sin(iy) = \frac{1}{2i}\big(e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}\big) = \frac{1}{2i}\big(e^{-y} - e^{y}\big) = -\frac{1}{i}\sinh(y) = i\sinh(y)$$

## 15.1. Polarkoordinaten

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} =: r$$

Die Strecke durch 0 und $z$ schließt mit der $x$-Achse einen Winkel $\varphi$ ein (im Bogenmaß).

Durch das Paar $(r,\ \varphi)$ ist $z$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt ist durch $z$ auch $r = |z|$ eindeutig bestimmt. Läßt man nur $\varphi \in (-\pi,\ \pi)$ zu, so ist durch $z$ auch $\varphi$ eindeutig bestimmt, $\varphi = \arg z$ (*Argument* von $z$).

Es ist $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ und $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, also

$$x = r \cdot \cos\varphi\,, \quad y = r \cdot \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$$

D.h.

$$\boxed{z = re^{i\varphi}\ , \quad \text{wobei } r = |z| \text{ und } \varphi = \arg z \quad \textit{Polarkoordinaten–Darstellung} \text{ von } z}$$

($z = x + iy$ heißt *kartesische* Koordinatendarstellung)

Ist speziell $r = 1$, also $z = e^{i\varphi}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)^n = \big(e^{i\varphi}\big)^n = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

Also

$$\boxed{\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \qquad \text{Formel von de Moivre}}$$

## 15.2. Geometrische Darstellung der Multiplikation

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$. Setze $r_j := |z_j|$ und $\varphi_j := \arg z_j$ für $j = 1, 2$ (also: $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$).

Dann gilt:

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} \;=\; r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

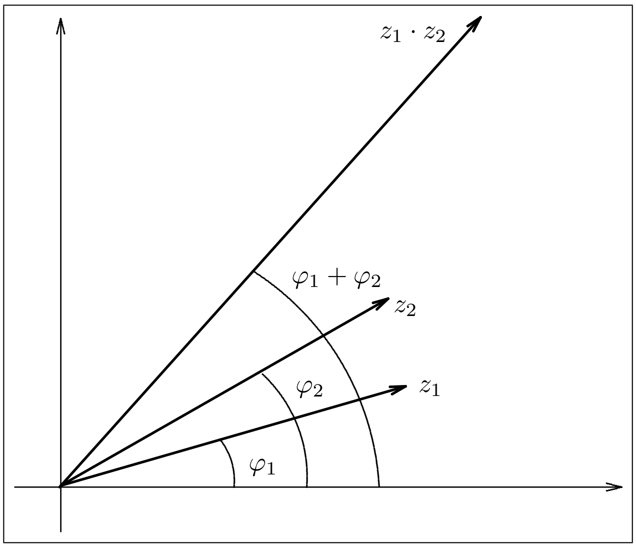



Abbildung 15.3.: Multiplikation in $\mathbb{C}$

Bemerkung:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = r_1 \cdot r_2$$

aber: $\quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad$ ist i.a. falsch!

**Beispiel 15.5.**

(1) Sei $z_1 = -1$ und $z_2 = -1$. Dann ist $\arg z_1 = \arg z_2 = \arg(-1) = \pi$ und $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Also:

$$\arg z_1 + \arg z_2 = \underbrace{2\pi \neq 0}_{\text{Differenz: } 2\pi} = \arg 1 = \arg(-1)^2 = \arg(z_1 \cdot z_2)$$

(2) Sei $z_1 = z_2 = -i$. Dann: $\arg z_1 = \arg z_2 = -\frac{\pi}{2}$.

$$z_1 \cdot z_2 = (-i)^2 = -1$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(-1) = \underbrace{\pi \neq -\pi}_{\text{Differenz: } 2\pi} = \arg z_1 + \arg z_2$$

vergleiche $2\pi$–Periodizität der komplexen $e$–Funktion.

## 15.3. $n$-te Wurzeln

Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Das Polynom

$$p(z) = z^n - a$$

hat nach 11.1 genau $n$ Nullstellen (mit Vielfachheit) in $\mathbb{C}$. Jede dieser Nullstellen (d.h. jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = a$) heißt *$n$-te Wurzel aus $a$.*

Sei $r = |a|$, $\varphi = \arg(a)$, also $a = re^{i\varphi}$. Setze

$$\omega_k := \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

**Satz 15.6.** Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$z$ ist eine $n$-te Wurzel aus $a \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{\omega_0,\ \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}$

**Beweis:**

„$\Leftarrow$“ Sei $z = \omega_k$ für ein $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$\Rightarrow \quad z^n = \omega_k^n = r \cdot e^{i\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)n} = r \cdot e^{i\varphi} \cdot \underbrace{e^{i2k\pi}}_{=1} = r \cdot e^{i\varphi} = a$$

„$\Rightarrow$“ $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ sind $n$ *verschiedene* $n$-te Wurzeln aus $a$.

Da nach dem Fundamentalsatz der Algebra *genau* $n$ $n$-te Wurzeln existieren, folgt die Behauptung.

□

Ist speziell $a = 1$, so heißen $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ die $n$-ten Einheitswurzeln.

**Beispiel 15.7.**

(1) Im Reellen: $\sqrt{4} = 2$. Im Komplexen sind die Wurzeln aus 4: $-2, 2$.

(2) Die Wurzeln aus $i$ sind: $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ und $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (Vergleiche Abbildung 15.4).

(3) Die 4-ten Einheitswurzeln sind: $1, -1, i, -i$.

(4) Im Reellen: $\sqrt[4]{16} = 2$. Die komplexen 4-ten Wurzeln aus 16 sind: $2, -2, 2i, -2i$.

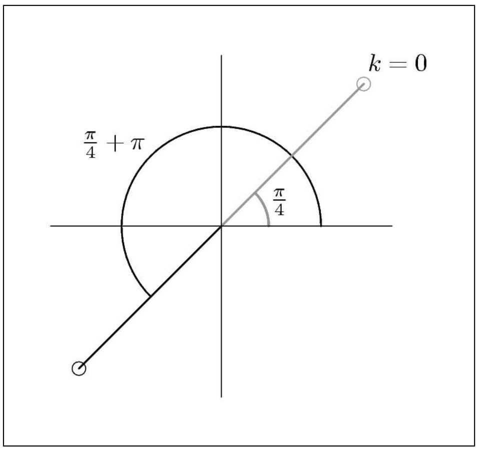



Abbildung 15.4.: $n$-te Wurzel: Skizze für $n = 2$ und $a = i$ ($r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$)

## 15.4. Analysis in $\mathbb{C}$

### Konvergenz von Folgen

**Definition 15.8.** Sei $(z_n)$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{C}$.
$(z_n)$ konvergiert gegen $w$

$$:\Leftrightarrow \quad |z_n - w| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = w \quad \text{oder} \quad z_n \to w \; (n \to \infty)$$

$(z_n)$ konvergiert

$$:\Leftrightarrow \quad \exists w \in \mathbb{C} \quad z_n \to w \; (n \to \infty)$$

**Bemerkung 15.9.** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad |\operatorname{Re} z| = |x| \leq |z| \,, \quad |\operatorname{Im} z| = |y| \leq |z| \,, \quad |z| \leq |x| + |y|$$

**Satz 15.10.** Sei $(z_n)$ eine Folge in $\mathbb{C}$. $z_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ und $w = u + iv$.
Dann gilt:

$$z_n \to w \quad \Leftrightarrow \quad x_n \to u \;\text{ und }\; y_n \to v \quad (n \to \infty)$$

**Beweis:** Nach obiger Bemerkung gilt:

$$\max\big\{|x_n - u|, |y_n - v|\big\} \;\leq\; |z_n - w| \;\leq\; |x_n - u| + |y_n - v| \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ Behauptung. $\square$

**Definition 15.11.** Sei $(z_n)$ eine Folge in $\mathbb{C}$. $(z_n)$ heißt CAUCHY–Folge

$$:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0 \quad |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

**Satz 15.12.** Sei $(z_n)$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann gilt:

$$(z_n) \text{ konvergiert } \Leftrightarrow (z_n) \text{ ist CAUCHY–Folge}$$

**Beweis:**

„$\Rightarrow$" geht wie im Reellen (vgl. 2.38).

„$\Leftarrow$" Sei $(z_n)$ eine CAUCHY–Folge in $\mathbb{C}$. Wegen obiger Bemerkung gilt:

$$\max\big\{|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z_m|, |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z_m|\big\} \leq |z_n - z_m| \leq |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z_m| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z_m|$$

Also sind $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ CAUCHY–Folgen in $\mathbb{R}$.

Somit existieren $u, v \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} z_n \to u$ und $\operatorname{Im} z_n \to v$.

Nach 15.10 gilt dann: $z_n \to u + iv$.

□

## Konvergenz von Reihen

Sei $(z_n)$ eine Folge in $\mathbb{C}$. $s_n := \sum_{k=1}^{n} z_k$ , $n \in \mathbb{N}$.

**Definition 15.13.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \text{ es existiert ein } w \in \mathbb{C} \text{ mit } s_n \to w \ (n \to \infty)$$

$$\underset{15.10}{\Leftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n \text{ konvergiert und } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n \text{ konvergiert}$$

In diesem Fall:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n \quad \text{Reihenwert}$$

Wie im Reellen zeigt man mit Hilfe von 15.12:

**Satz 15.14.** Ist $(z_n)$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergent, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

# 16. FOURIER–Reihen

## 16.1. Orthogonalitätsrelationen

Durch Differenzieren bestätigt man für $n, k \in \mathbb{N}_0$:

$$2\int \sin(nx)\sin(kx)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{n-k}\sin\big((n-k)\cdot x\big) - \frac{1}{n+k}\sin\big((n+k)\cdot x\big) + c & \text{für } n \neq k \\ x - \frac{\sin(2nx)}{2n} + c & \text{für } n = k \neq 0 \end{cases}$$

$$2\int \cos(nx)\cos(kx)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{n-k}\sin\big((n-k)\cdot x\big) + \frac{1}{n+k}\sin\big((n+k)\cdot x\big) + c & \text{für } n \neq k \\ x + \frac{\sin(2nx)}{2n} + c & \text{für } n = k \neq 0 \end{cases}$$

$$2\int \sin(nx)\cos(kx)\,dx = \begin{cases} -\frac{1}{n-k}\cos\big((n-k)\cdot x\big) - \frac{1}{n+k}\cos\big((n+k)\cdot x\big) + c & \text{für } n \neq k \\ -\frac{\cos(2nx)}{2n} + c & \text{für } n = k \neq 0 \end{cases}$$

Daraus folgen die

**Orthogonalitätsrelationen 16.1.**

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq k \\ \pi & \text{für } n = k \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)\,dx = 0$$

Im folgenden sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $2\pi$-*periodische* Funktion, d.h. es gelte:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

Man stellt leicht fest:

Ist $a \in \mathbb{R}$ und $f \in R[a, a + 2\pi]$, so gilt für jedes $b \in \mathbb{R}$:

$$f \in R[b, b + 2\pi], \quad \text{und} \quad \int\limits_{a}^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int\limits_{b}^{b+2\pi} f(x)\,dx$$

(siehe Abbildung 16.1). Deswegen werden wir das Intervall $[-\pi, \quad \pi]$ zugrundelegen.

## 16.2. Die FOURIER–Reihe

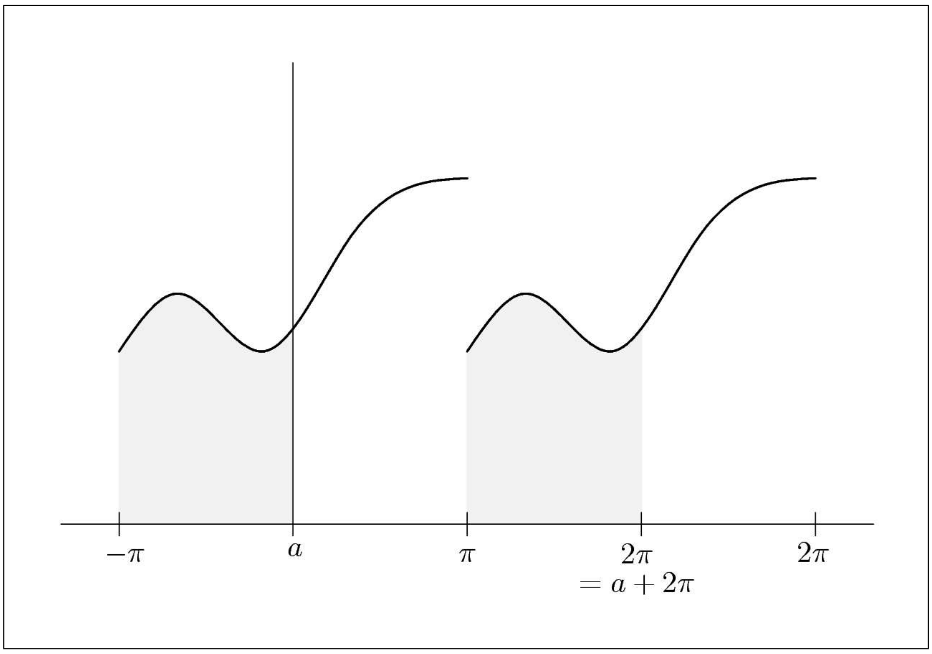



Abbildung 16.1.: Graph einer $2\pi$–periodischen Funktion; der Inhalt der hervorgehobenen Flächen ist derselbe.

**Definition 16.2.** Gegeben seien reelle Folgen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Eine Funktionenreihe der folgenden Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[ a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big]$$

heißt *trigonometrische Reihe.*

*Feststellung:* Falls eine trigonometrische Reihe konvergiert, so ist die durch sie dargestellte Funktion $2\pi$-periodisch (elementar).

*Wesentliche Frage:* Wann lässt sich eine gegebene $2\pi$-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch eine trigonometrische Reihe darstellen? D.h. wann gibt es Folgen $(a_n)$, $(b_n)$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[ a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big] \; ? \tag{16-i}$$

Wir nehmen zunächst an, dass (16-i) gilt. Wie sehen dann die $a_n$ und $b_n$ aus? Setze dazu weiter voraus: Die Reihe in (16-i) konvergiere *gleichmäßig* auf $[-\pi,\ \pi]$. Sei nun $k \in \mathbb{N}$ fest.

$$\text{(16-i)} \quad \Rightarrow \quad f(x)\sin(kx) = \frac{a_0}{2}\sin(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[ \underbrace{a_n \cos(nx)\sin(kx) + b_n \sin(nx)\sin(kx)}_{=:c_n} \Big]$$

Die Reihe $(c_n)$ konvergiert ebenfalls gleichmäßig auf $[-\pi,\ \pi]$.

$$\underset{10.21}{\Rightarrow} \; f(x)\sin(kx) \text{ ist integrierbar über } [-\pi,\ \pi]$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(kx)\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(kx)\,dx\right]$$

$$\underset{16.1}{=} \pi \cdot b_k$$

$$\Rightarrow \boxed{b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx} \quad (\text{für } k \in \mathbb{N}) \tag{16-ii}$$

Multipliziert man (16-i) mit $\cos(kx)$ (für $k \in \mathbb{N}_0$) und integriert wieder über $[-\pi,\ \pi]$, so erhält man entsprechend:

$$\Rightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx} \quad (\text{für } k \in \mathbb{N}_0) \tag{16-iii}$$

**Definition 16.3.** Sei $f \in R[-\pi,\ \pi]$. Dann heißen die in (16-ii) und (16-iii) definierten Zahlen die FOURIER–*Koeffizienten* von $f$. Die entsprechende trigonometrische Reihe

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big]}$$

heißt dann die *zu $f$ gehörige* FOURIER–*Reihe.*

**Definition 16.4.**

- $f$ heißt *gerade* $:\Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) = f(-x)$
- $f$ heißt *ungerade* $:\Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) = -f(-x)$.

**Satz 16.5.** Ist $f \in R[-\pi,\ \pi]$, so gilt für die FOURIER–Koeffizienten von $f$:

- falls $f$ gerade:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

- falls $f$ ungerade:

$$a_k = 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

d.h. die FOURIER–Reihe einer geraden bzw. ungeraden Funktion ist eine reine Cosinus– bzw. Sinus-Reihe.

**Beweis:** Nur für gerades $f$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos(kx)}_{=:\varphi(x)}\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\int\limits_{-\pi}^{0} \varphi(x)\, dx}_{\text{subst. } t=-x} + \int\limits_{0}^{\pi} \varphi(x)\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\pi} \underbrace{\varphi(-t)}_{=\varphi(t)}\, dt + \int\limits_{0}^{\pi} \varphi(x)\, dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \varphi(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \text{Behauptung}$$

Analog $b_k = 0$. □

**Definition 16.6.** $g : [-\pi,\ \pi] \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise glatt*, wenn eine Zerlegung $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ von $[-\pi,\ \pi]$ existiert mit:

(1) $g$ ist in jedem Teilintervall $(t_{j-1},\ t_j)$ *stetig differenzierbar*.

(2) Die folgenden Grenzwerte existieren:

$$\lim_{x\to t_j-} g(x), \quad \lim_{x\to t_j+} g(x)$$
$$\lim_{x\to t_j-} g'(x), \quad \lim_{x\to t_j+} g'(x)$$

für $j = 1, \ldots, m-1$.

$$\lim_{x\to \pi-} g(x), \quad \lim_{x\to -\pi+} g(x)$$
$$\lim_{x\to \pi-} g'(x), \quad \lim_{x\to -\pi+} g'(x)$$

Siehe auch Abbildung 16.2.

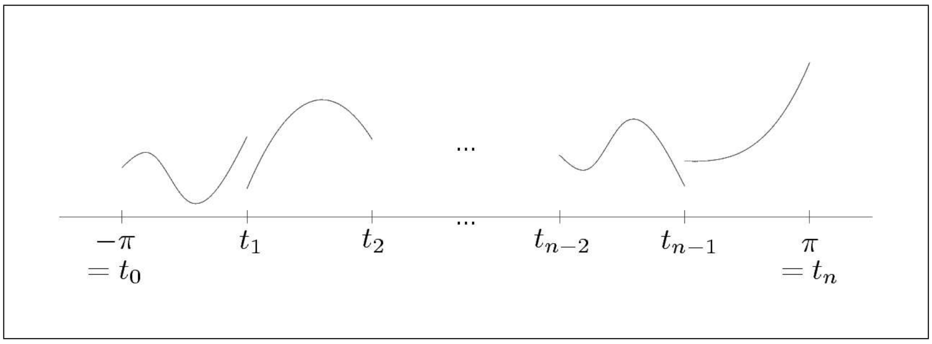



Abbildung 16.2.: Stückweise glatte Funktion

**Beachte:** Ist $g$ stückweise glatt, so wird in den Punkten $t_j$ *nicht* die Stetigkeit (oder gar die Differenzierbarkeit) gefordert.

Für stückweise glattes $g$ gilt offenbar insbesondere:

$g \in R[-\pi,\ \pi]$

**Definition 16.7.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($2\pi$-periodisch) heißt stückweise glatt, wenn $f\big|_{[-\pi,\ \pi]}$ stückweise glatt ist.

In diesem Fall existieren für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte

$$f(x+) := \lim_{t \to x+} f(t), \quad f(x-) := \lim_{t \to x-} f(t).$$

**Satz 16.8.** Ist $f$ stückweise glatt, so konvergiert die FOURIER–Reihe von $f$ in jedem $x \in \mathbb{R}$ (punktweise!) gegen

$$s(x) := \frac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big)$$

Ist $f$ insbesondere stetig in $x$, so konvergiert die FOURIER–Reihe von $f$ an der Stelle $x$ gegen $f(x)$.

**Beispiel 16.9** (Sägezahnschwingung)**.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $2\pi$-periodisch und auf $(-\pi,\ \pi]$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in (-\pi,\ \pi) \\ 0 & \text{für } x = \pi \end{cases}$$

(Insbesondere $s(x) = \frac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$)

$f$ ist ungerade; also nach 16.5:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad a_k = 0$$

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N} \quad b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{f(x)}_{u} \underbrace{\sin(kx)}_{v'}\ dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{k}\ dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\pi\frac{\cos(k\pi)}{k}\right) + \underbrace{\frac{2}{\pi}\frac{\sin(kx)}{k^2}\Big|_0^\pi}_{=0} \\
&= \frac{2}{k}(-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

Da $f$ stückweise glatt und $f(x) = s(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt nach 16.8:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin(kx) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\
&= 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} \mp \cdots\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \forall x \in (-\pi,\ \pi) \quad x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} \mp \cdots\right)$$

Speziell für $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots$$

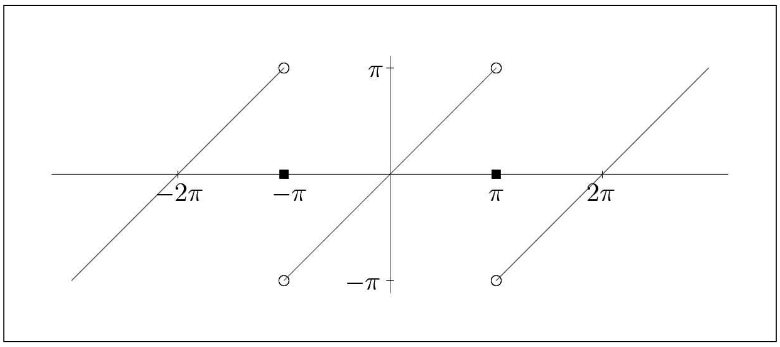



Abbildung 16.3.: Sägezahnschwingung

**Beispiel 16.10** (Rechteckschwingung). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $2\pi$-periodisch und auf $(-\pi,\ \pi)$ definiert durch:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0,\ x = \pi \end{cases}$$

Dann: $f$ stückweise glatt und $s(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Da $f$ ungerade:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad a_k = 0$$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(kx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{2}{k\pi} \big( (-1)^k - 1 \big) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16.8 \ \Rightarrow\ f(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \sin(kx) \\ &= \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots \right) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \quad \forall x \in (0, \pi) \quad 1 = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots \right)$$

Speziell für $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots$$

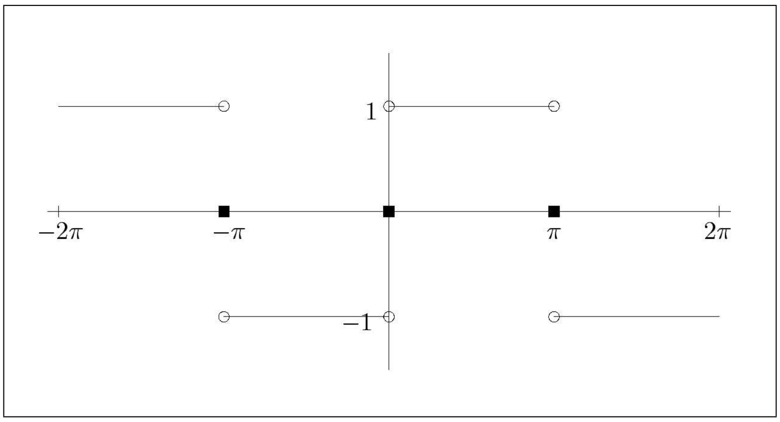



Abbildung 16.4.: Rechteckschwingung

**Beispiel 16.11.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$-periodisch und auf $(-\pi,\ \pi]$ definiert durch

$$f(x) := x^2 \qquad \text{(vgl. Abb. 16.5)}$$

$f$ ist stückweise glatt, $s(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f$ ist gerade, also

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad b_k = 0$$

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N} \quad a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(kx)\ dx = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[x^2 \frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi 2x \frac{\sin(kx)}{k}\ dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{2x\cos(kx)}{k^2}\right]_0^\pi - 2\int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{k^2}\ dx\right) \\
&= \frac{4}{k^2}(-1)^k - 2\underbrace{\left[\frac{\sin(kx)}{k^3}\right]_0^\pi}_{=0} \\
&= \frac{4}{k^2}(-1)^k
\end{aligned}$$

Schließlich

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\ dx = \frac{2\pi^2}{k}$$

$$\begin{aligned}
\underset{16.8}{\Rightarrow} \ f(x) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos(kx) \\
&= \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} \mp \cdots\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \forall x \in [-\pi,\ \pi] \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} \mp \cdots\right)$$

Speziell für $x = 0$:

$$\frac{\pi^2}{3} = 4\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} \pm \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Speziell für $x = \pi$:

$$\frac{\pi^2}{6} = -\left(-1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \cdots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

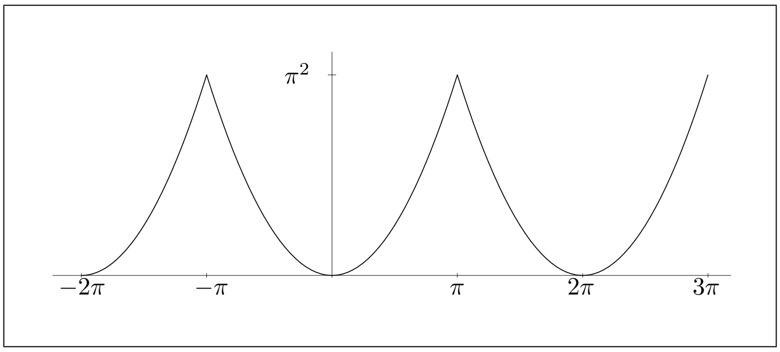



Abbildung 16.5.: Graph zur Funktion aus Beispiel 16.11

**Beispiel 16.12.** $f$ sei $2\pi$-periodisch und auf $(-\pi,\ \pi]$ definiert durch

$$f(x) := |x|$$

Lt. Saalübung:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \cdots\right)$$

Speziell für $x = 0$:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

**Satz 16.13** (BESSELsche Ungleichung). Sei $g \in R[-\pi,\ \pi]$ und

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(kx)\, dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(kx)\, dx \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\, dx$$

**Beweis:** Sei $n \in \mathbb{N}$; dann

$$
\begin{aligned}
0 &\le \int_{-\pi}^{\pi} \left[ g(x) - \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big) \right\} \right]^2 \, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ g(x)^2 - 2g(x)\{\dots\} + \{\dots\}^2 \right] \, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 \, dx - \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \right)
\end{aligned}
$$

wegen Orthogonalitätsrelation 16.1 und der Definition von $a_k$, $b_k$.

$\Rightarrow$ Behauptung. □

**Korollar 16.14.** Seien $g$, $a_k$, $b_k$ wie in 16.13. Dann gilt:

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right)$ konvergent, und

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 \, dx$$

(2) $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = \lim\limits_{k \to \infty} b_k = 0$

**Beweis:**

(1) folgt aus 16.13 und 3.4

(2)

$$a_k^2 \le a_k^2 + b_k^2 \underset{\substack{\text{Majoranten-}\\\text{Kriterium}}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \text{ konvergent}$$

$$\underset{3.4}{\Rightarrow} \quad a_k^2 \xrightarrow{k \to \infty} 0 \quad \Rightarrow \quad a_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Analog: $b_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$

□

**Satz 16.15.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$-periodisch, stetig und stückweise glatt. Dann gilt:

(1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die FOURIER–Reihe von $f$ *absolut* konvergent

(2) Die FOURIER–Reihe von $f$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ *gleichmäßig* gegen $f$.

(3) Sind $a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $b_n$, $n \in \mathbb{N}$ die FOURIER–Koeffizienten von $f$, so sind die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$$

konvergent.

(ohne Beweis)

**Beispiel 16.16.**

*Behauptung:* Die trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

ist nicht die FOURIER–Reihe einer Funktion $g \in R[-\pi, \pi]$.

**Beweis:**

*Annahme:* Es existiert ein $g \in R[-\pi, \pi]$ mit $a_n(g) = 0,\ n \in \mathbb{N}_0$ und $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N}$.

$\underset{16.14}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert $\lightning$. □

**Bemerkung 16.17.** Man kann zeigen:

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}}_{=:g(x)}$$

- $x \mapsto g(x)\sin(kx) \in R[-\pi, \pi]$ für jedes $k \in \mathbb{N}$
- $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow\quad g \notin R[-\pi, \pi]$.

**Satz 16.18** (Satz von RIEMANN–LEBUEQUE)**.**
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $g \in R[a, b]$. Dann gilt:

(1) $\displaystyle\int_a^b g(x)\sin(nx)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und

(2) $\displaystyle\int_a^b g(x)\cos(nx)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$

**Beweis:** nur für (1).

1\. Fall: Es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $[a, b] \subset [2k\pi, 2(k+1)\pi] =: I$.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$–periodisch und auf $I$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & \text{für } x \in (a, b) \\ 0 & \text{für } x \in I \setminus (a, b) \end{cases}$$

Nach 10.34 ist $f \in R[a,b]$ also auch $f \in R(I)$. Weiter ist

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b g(x)\sin(nx)\,dx &= \int\limits_a^b f(x)\sin(nx)\,dx\\ &= \int\limits_I f(x)\sin(nx)\,dx\\ &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \pi b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

2. Fall: Fall 1 trifft auf $[a,b]$ nicht zu.

Dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, ein $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq 2$ und $[a,b] \subset \big[2k\pi,\, 2(k+l)\pi\big]$.

Setze $t_0 := a,\ t_1 := 2(k+1)\pi,\ t_{l-1} := 2(k+l-1)\pi,\ t_l := b$. Dann

$$\int\limits_a^b g(x)\sin(nx)\,dx = \sum_{j=1}^{l}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} g(x)\sin(nx)\,dx$$

und Fall 1 trifft auf jedes Intervall $[t_{j-1}, t_j]$ zu. Nach Fall 1 gilt dann:

$$\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} g(x)\sin(nx)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{für } j = 1,\ldots,l$$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b g(x)\sin(nx)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

□

## 16.3. Komplexe Schreibweise von FOURIER–Reihen

**Definition 16.19.** Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $u := \operatorname{Re} g,\ v := \operatorname{Im} g$, d.h. $u,v : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g(x) = u(x) + iv(x)$ für alle $x \in [a,b]$.

$$g \in R[a,b] \quad\Leftrightarrow\quad u \in R[a,b] \quad \text{und} \quad v \in R[a,b]$$

In diesem Fall:

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx := \int\limits_a^b u(x)\,dx + i\int\limits_a^b v(x)\,dx$$

**Bemerkung 16.20.** Ist zusätzlich $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $h \in R[a,b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so gilt

(a) $\alpha g + \beta h \in R[a,b]$

(b)

$$\int_a^b (\alpha g + \beta h)\, dx = \alpha \int_a^b g\, dx + \beta \int_a^b h\, dx$$

**Definition 16.21.** Sei $f \in R[-\pi, \pi]$ reell– oder komplexwertig. Dann heißen

$$\boxed{c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx}\, dx \quad n \in \mathbb{Z}}$$

die *komplexen* FOURIER–*Koeffizienten* von $f$ und

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) \cdot e^{inx}}$$

die *komplexe* FOURIER–*Reihe* von $f$.

Sei $f \in R[-\pi, \pi]$ und reellwertig. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \qquad \big[e^{-inx} = \cos(nx) - i \sin(nx)\big] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\big(a_n(f) - i b_n(f)\big) \end{aligned}$$

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i0x}\, dx = \frac{1}{2} a_0(f)$$

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\, dx = \frac{1}{2}\big(a_n(f) + i b_n(f)\big)$$

Folglich ist

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(c_k(f) e^{ikx} + c_{-k}(f) e^{-ikx}\big)$$

und

$$\begin{aligned} c_k(f) e^{ikx} + c_{-k}(f) e^{-ikx} &= \cos(kx)\big(c_k(f) + c_{-k}(f)\big) + i \sin(kx)\big(c_k(f) - c_{-k}(f)\big) \\ &= \cos(kx) a_k(f) + i \sin(kx)\big(-i b_k(f)\big) \\ &= a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx) \end{aligned}$$

Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx))$$

**Definition 16.22.** Sei $(c_n)$ eine Folge in $\mathbb{C}$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \text{ existiert und ist} \in \mathbb{C}$$

**Fazit:**

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ und $f \in R[-\pi, \pi]$

1. Die komplexe FOURIER–Reihe von $f$ ist gleich der reellen FOURIER–Reihe von $f$.
2. Die komplexe FOURIER–Reihe von $f$ konvergiert in $x \quad \Leftrightarrow \quad$ die reelle FOURIER–Reihe konvergiert in $x$ (im Sinne der obigen Definition).

# Teil II.

# Mehrdimensionale Analysis, Differentialgleichungen, Transformationen

# 17. Der Raum $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ist mit der Addition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$–Vektorraum.

Mit $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die *Einheitsvektoren*.

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots \quad e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

**Definition 17.1.** Für $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definiere

(1) $x \cdot y := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ als *inneres Produkt, Innenprodukt, Skalarprodukt* von $x$ und $y$.

(2) $\|x\| := (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ als *Norm, Betrag, Länge* von $x$.

(3) Wir nennen $\|x - y\|$ den *Abstand* von $x$ und $y$.

**Beispiel 17.2.**

- $\|e_j\| = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$
- $\|(1, 2, 3)\| = \sqrt{14}$

  (vgl. auch Abb. 17.1)

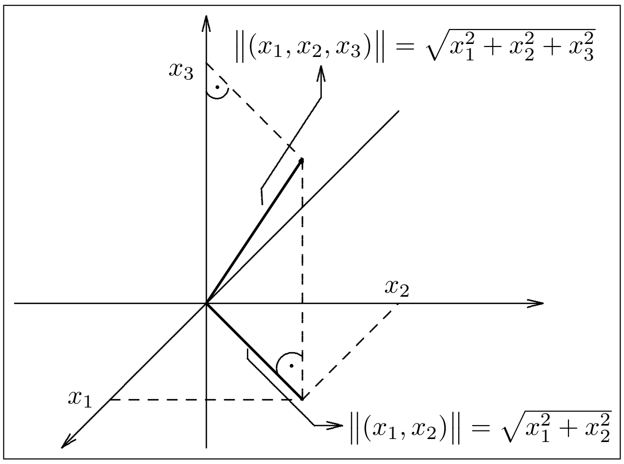



Abbildung 17.1.: Länge eines Vektors

**Satz 17.3.** Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)$

(2) $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

(3) $x \cdot y = y \cdot x$

(4) $\|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 = (0, \dots, 0)$

(5) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

(6) $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

(7) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

(8) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$

(9) Ist $x = (x_1, \dots, x_n)$, so gilt für $j = 1, \dots, n$:

$$|x_j| \leq \|x\| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

**Beweis:** (1) bis (5): Direktes Nachrechnen

- zu (6): Ist $y = 0$, ist nichts zu zeigen; also sei $y \neq 0$. Setze

$$X := \|x\|^2, \quad Y := x \cdot y,\ Z := \|y\|^2, \quad \alpha := \frac{Y}{Z}.$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha y_j)^2 &= \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{=\|x\|^2=X} -2\alpha \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i y_i}_{=(x \cdot y)=Y} +\alpha^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i^2}_{=\|y\|^2=Z} \\ &= X - 2\alpha Y + \alpha^2 Z \\ &= X - \frac{Y^2}{Z} \end{aligned}$$

Da $Z > 0:\ Y^2 \leq XZ$, also $(x \cdot y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$

- zu (7):

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) &\underset{(2),(3)}{=} (x \cdot x) + 2(x \cdot y) + (y \cdot y) \\ &= \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|x \cdot y| + \|y\|^2 \\ &\underset{\text{CSU}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2 \ \Rightarrow\ \text{Behauptung} \end{aligned}$$

- zu (8):

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

$$\Rightarrow\ \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Rollentausch: $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$

$$\Rightarrow\ \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

- zu (9):

$$|x_j|^2 = x_j^2 \leq x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2 \ \Rightarrow\ 1.\ \text{Ungleichung}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + e_n x_n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ \|x\| = \|x_1 e_y + \dots + x_n e_n\| &\underset{(7)}{\leq} \|x_1 e_1\| + \dots + \|x_n e_n\| \\ &\underset{(5)}{=} |x_1|\ \underbrace{\|e_1\|}_{=1} + \dots + |x_n|\ \underbrace{\|e_n\|}_{=1} = |x_1| + \dots + |x_n| \end{aligned}$$

$\square$

**Definition 17.4.** Sei

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

eine reelle $p \times q$–Matrix. ($a_{ij} \in \mathbb{R}$).

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{jk}^2} \qquad \textit{Norm von } A$$

Es gilt: Ist außerdem $B$ eine reelle $q \times l$–Matrix (d.h. $A \cdot B$ ist definiert als $p \times l$–Matrix), so gilt:

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \qquad \text{(Submultiplikativität der Matrix-Norm)}$$

Insbesondere betrachte Matrix–Vektor–Produkt ($A$ reelle $p \times q$–Matrix, $x \in \mathbb{R}^q$):

$$Ax := A \cdot x^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1q}x_q \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2q}x_q \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pq}x_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

Dann gilt wegen der Submultiplikativität der Matrix-Norm:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

(Beachte: Für $p \times 1$– bzw. $q \times 1$-Matrizen stimmen Matrix-Norm und Vektornorm überein.)

**Definition 17.5.** Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$

$$U_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x_0\| < \delta\}$$

*$\delta$-Umgebung von* $x_0$, offene Kugel um $x_0$ mit Radius $\delta$.

$$\overline{U_\delta}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x_0\| \leq \delta\}$$

abgeschlossene Kugel um $x_0$ mit Radius $\delta$.

**Definition 17.6.** $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *beschränkt* $:\Leftrightarrow \ \exists c \geq 0 \ \forall x \in A \quad \|x\| \leq c$

**Definition 17.7.** $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *offen* $:\Leftrightarrow \ \forall x \in A \ \exists \delta > 0 \quad U_\delta(x) \subset A$

**Beispiel 17.8.**

- offene Kugeln sind offen
- $\mathbb{R}^n$ ist offen
- $\emptyset$ ist offen

- abgeschlossene Kugeln sind *nicht* offen
- $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2\big\}$ ist *nicht* offen.

**Definition 17.9.** $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossen* $:\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen.

**Beispiel 17.10.**

- abgeschlossene Kugeln sind abgeschlossen
- $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen
- $\emptyset$ ist abgeschlossen
- obige Menge $A$ (Parabel) ist abgeschlossen
- offene Kugeln sind *nicht* abgeschlossen

**Definition 17.11.** $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *kompakt*, wenn $K$ beschränkt und abgeschlossen ist.

# 18. Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

**Definition 18.1.** Sei $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$, also

$$a^{(k)} = \left(a_1^{(k)},\ a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}\right), \qquad a_j^{(k)} \in \mathbb{R}$$

(1) *Teilfolgen* definiert wie in 2.24.

(2) $(a^{(k)})$ heißt *beschränkt* $:\Leftrightarrow\ \exists c \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N} \quad \|a^{(k)}\| \leq c$

(3) $x_0$ heißt ein *Häufungswert* von $(a^{(k)})$ $:\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0 \quad a^{(k)} \in U_\varepsilon(x_0)$

(4) $(a^{(k)})$ heißt *konvergent*

$$:\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n\ \forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 \quad \|a^{(k)} - a\| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n \quad \|a^{(k)} - a\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n\ \forall \varepsilon > 0 \quad a^{(k)} \in U_\varepsilon(a) \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N}$$

In diesem Fall heißt $a$ *Grenzwert (Limes)* der Folge $a^{(k)}$. Bezeichnung:

$$a = \lim_{k\to\infty} a^{(k)} \qquad \text{oder} \qquad a^{(k)} \to a \text{ für } k \to \infty$$

**Beispiel 18.2.** $n = 2$, $a^{(k)} := \left(\frac{1}{k},\ 1 + \frac{1}{k^2}\right) \in \mathbb{R}^2$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Dann

$$\|a^{(k)} - (0,1)\| = \left\|\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)\right\| = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Also:

$$a^{(k)} \to (0,1) \text{ für } k \to \infty$$

Wie im eindimensionalen Fall zeigt man u.a.:

(1) Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt. (vgl. 2.9)

(2) $x_0$ ist ein Häufungswert von $(a^{(k)})$ $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Teilfolge von $(a^{(k)})$, die gegen $x_0$ konvergiert.

(3) Konvergente Folgen sind beschränkt. (vgl. 2.9)

(4) Konvergiert $(a^{(k)})$ gegen $a$, so konvergiert auch jede Teilfolge von $(a^{(k)})$ gegen $a$. (vgl. 2.29)

(5) Konvergieren $(a^{(k)})$ und $(b^{(k)})$ gegen $a$ bzw. $b$ und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$a^{(k)} + b^{(k)} \to a + b, \qquad \lambda a^{(k)} \to \lambda a, \qquad \left\|a^{(k)}\right\| \to \|a\|$$

(6) Konvergieren $a^{(k)}$ und $b^{(k)}$ gegen $a$ bzw. $b$, so gilt

$$a^{(k)} \cdot b^{(k)} \to a \cdot b$$

**Satz 18.3.** Sei $\left(a^{(k)}\right)$ Folge in $\mathbb{R}^n$, $a^{(k)} := \left(a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}\right)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(1) Ist $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, so gilt:

$$a^{(k)} \to a \ (k \to \infty) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad a_j^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} a_j}_{\text{„komponentenweise Konvergenz“}}$$

(2) **Satz von** Bolzano–Weierstrass: Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ enthält eine konvergente Teilfolge.

(3) Cauchy–**Kriterium**: $(a^{(k)})$ konvergent

$$:\Leftrightarrow \underbrace{\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \forall k, l \geq k_0 \quad \left\| a^{(k)} - a^{(l)} \right\| < \varepsilon}_{\Leftrightarrow:(a^{(k)}) \text{ ist Cauchy–Folge}}$$

**Beweis:**

(1) Nach 17.3 (9) gilt:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \left| a_j^{(k)} - a_j \right| \leq \left\| a^{(k)} - a \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| a_j^{(k)} - a_j \right|$$

$\Rightarrow$ Behauptung

(2) Der Übersicht halber nur für $n = 2$, also

$$a^{(k)} = \left(a_1^{(k)},\ a_2^{(k)}\right).$$

Nach 17.3 gilt

$$\left| a_j^{(k)} \right| \leq \left\| a^{(k)} \right\| \qquad (j = 1, 2)$$

D.h.: Ist $(a^{(k)})$ beschränkt, so auch $\left(a_j^{(k)}\right)$ $(j = 1, 2)$.

Nach Bolzano–Weierstrass in $\mathbb{R}$ hat $\left(a_1^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\left(a^{(k_\nu)}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$.

Da $\left(a_2^{(k_\nu)}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$ beschränkt, existiert nach Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$ eine konvergente Teilfolge $\left(a_2^{(k_{\nu_l})}\right)_{l\in\mathbb{N}}$. Da $\left(a_2^{(k_{\nu_l})}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $\left(a_1^{(k_\nu)}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$, ist auch $\left(a_1^{(k_{\nu_l})}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ konvergent.

$\underset{(1)}{\Rightarrow}$ $\left(a^{(k_{\nu_l})}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(3) „$\Rightarrow$“ wie im eindimensionalen Fall (vgl. 2.38).

„$\Leftarrow$“: Nach 17.3:

$$\left| a_j^{(k)} - a_l^{(k)} \right| \leq \left\| a^{(k)} - a^{(l)} \right\| \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, n\}$$

Also:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \ (a_j^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge in } \mathbb{R}$$

$$\underset{2.38}{\Rightarrow} \ \forall j \in \{1, \dots, n\} \ \exists a_j \in \mathbb{R} \quad a_j^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} a_j$$

Setze $a := (a_1, \dots, a_n)$. Dann nach (1): $a^{(k)} \to a$ für $k \to \infty$.

$\square$

**Definition 18.4.** Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt *Häufungspunkt* von $A$, wenn gilt:
Es existiert eine Folge $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $A \setminus \{x_0\}$ mit $a^{(k)} \to x_0$ für $k \to \infty$.

*Wie im eindimensionalen Fall (vgl. 6.3) zeigt man:*

$$x_0 \text{ ist Häufungspunkt von } A \;\Leftrightarrow\; \text{Jede } \delta\text{-Umgebung } U_\delta(x_0) \text{ enthält einen von } x_0 \text{ verschiedenen Punkt aus } A.$$

**Beispiel 18.5.**

(1) Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $A := U_\varepsilon(a)$. Dann ist $x_0$ ein Häufungspunkt von $A \;\Leftrightarrow\; x_0 \in \overline{U_\varepsilon(a)}$.

(2) Sei statt dessen $A := U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$. Dann ist $x_0$ immer noch ein Häufungspunkt von $A \;\Leftrightarrow\; x_0 \in \overline{U_\varepsilon(a)}$.

(3) Ist $A$ endlich, so hat $A$ *keine* Häufungspunkte.

**Satz 18.6.** Sei $A \subset \mathbb{R}^n$.

(1) $A$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Für jede *konvergente* Folge $\left(a^{(k)}\right)$ in $A$ gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} a^{(k)} \in A$.

(2) $A$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Jeder Häufungspunkt von $A$ gehört zu $A$.

(3) $A$ ist kompakt $\Leftrightarrow$ Jede Folge in $A$ enthält eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $A$.

**Beweis:**

(1)

„$\Rightarrow$“: Sei $A$ abgeschlossen. *Annahme:* Es existiert eine konvergente Folge $(a^{(k)})$ in $A$ mit

$$a := \lim_{k\to\infty} a^{(k)} \notin A$$

Also $a \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Da $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \setminus \mathbb{R}^n \setminus A$. Wegen $(a^{(k)}) \to a$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall k \geq k_0 \quad \|a^{(k)} - a\| < \varepsilon, \text{ d.h. } \forall k \geq k_0 \; a^{(k)} \in U_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}^n \setminus A \quad ↯$$

„$\Leftarrow$“: Gelte die rechte Seite. *Annahme:* $A$ nicht abgeschlossen, d.h. $\mathbb{R}^n \setminus A$ nicht offen, also: Es existiert $a \in \mathbb{R}^n \setminus A$ mit

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad U_{\frac{1}{k}}(a) \not\subset \mathbb{R}^n \setminus A$$

$$\Rightarrow \; \forall k \in \mathbb{N} \; \exists a^{(k)} \in A \quad \underbrace{a^{(k)} \in U_{\frac{1}{k}}(a)}_{\|a^{(k)}-a\|<\frac{1}{k}}$$

Also $(a^{(k)}) \xrightarrow{k\to\infty} a$.

$\Rightarrow \; a \subset A \quad ↯$

(2) vgl. Saalübung

(3) wie im eindimensionalen Fall (vgl. 7.16)

$\square$

# 19. Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

Stets in diesem Abschnitt: $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine (vektorwertige) Funktion.

$f$ hat also die Form

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \big(f_1(x_1, \ldots, x_n),\ f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

wobei $f_j : D \to \mathbb{R}$ reellwertig $(j = 1, \ldots, m)$.

Kurz: $f = (f_1, \ldots, f_m)$

**Beispiel 19.1.**

(1) $n = 2$, $D = \mathbb{R}^2$, $m = 3$,

$$f(x) = f(x_1, x_2) := \big(x_1 x_2,\ x_1^2 + 2x_2,\ \sin(x_1 x_2)\big)$$

(2) $n$ beliebig, $D := \{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\| \leq 1\}$,

$$f(x) := \sqrt{1 - \|x\|} \quad (m = 1)$$

**Vereinbarung:** Im Falle $n = 2$ schreiben wir für $(x_1, x_2)$ meist $(x, y)$, im Falle $n = 3$ für $(x_1, x_2, x_3)$ meist $(x, y, z)$.

**Veranschaulichung** des Graphen von $f$

- im Fall $n = 2$, $m = 1$: Abb. 19.1
- im Fall $n = 1$, $m = 2$: Abb. 19.2

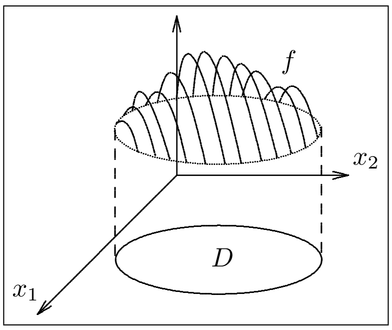



Abbildung 19.1.: $n = 2$, $m = 1$

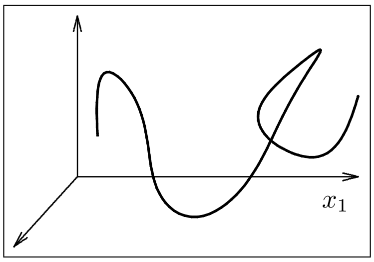



Abbildung 19.2.: $n = 1$, $m = 2$ (Kurve im Raum)

**Definition 19.2.** Sei $x_0$ ein Häufungspunkt (HP) von $D$ und $y_0 \in \mathbb{R}^m$. Wir sagen:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0 \;:\Leftrightarrow\;$ Für *jede* Folge $\left(x^{(k)}\right)$ in $D$ mit $x^{(k)} \to x_0$ für $k \to \infty$ und $\forall k \in \mathbb{N}\; x^{(k)} \neq x_0$ gilt: $f\left(x^{(k)}\right) \to y_0$

alternative Schreibweise:

$$f(x) \to y_0 \text{ für } x \to x_0$$

**Satz 19.3.** Sei $x_0$ Häufungspunkt von $D$, $g : D \to \mathbb{R}^m$ sei eine weitere Funktion.

(1)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall x \in D \setminus \{x_0\} \quad \Big[\|x - x_0\| < \delta \;\Rightarrow\; \big\|f(x) - y_0\big\| < \varepsilon\Big]$$

(2) Aus $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = z_0$ $(\in \mathbb{R}^m)$ folgt:

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = y_0 + z_0, \qquad \lim_{x \to x_0} \big(\lambda f(x)\big) = \lambda y_0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = y_0 \cdot z_0$$

(3) Ist $m = 1$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = z_0 \neq 0$, dann:

$$\exists \delta > 0\; \forall x \in D \cap U_\delta(x_0) = \hat{D} \quad g(x) \neq 0$$

und

$$\frac{f}{g} : \hat{D} \to \mathbb{R} \text{ gilt } \left(\frac{f}{g}\right)(x) \xrightarrow{x \to x_0} \frac{y_0}{z_0}$$

(4) Cauchy–**Kriterium**:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existiert}$$

$$\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall x, z \in D \quad \Big[(0 < \|x - x_0\| \text{ und } \|z - x_0\| < \delta) \;\Rightarrow\; \big\|f(x) - f(z)\big\| < \varepsilon\Big]$$

(5) Ist $f = (f_1, \dots, f_m)$ und $y_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0,m})$, so gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \;\Leftrightarrow\; \forall j \in \{1, \dots, m\}\; \lim_{x \to x_0} f_j(x) = y_{0,j}$$

**Beweis:** (1) bis (4) wie im eindimensionalen Fall (vgl. 6.7, 6.8, 6.9), (5) folgt aus 18.3 (1) □

**Beispiel 19.4.** $D = \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (xy, x^2+y^2, \sin(xy))$

Dann gilt:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = (1, 2, \sin(1))$$

denn:

Sei $\big((x_n, y_n)\big)$ Folge in $D$ mit $(x_n, y_n) \to (1,1)$, denn nach 18.3 gilt: $x_n \to 1,\ y_n \to 1$

$$\Rightarrow \quad x_n y_n \to 1,\ x_n^2 + y_n^2 \to 2,\ \sin(x_n y_n) \to \sin(1)$$

$$\underset{18.3}{\Rightarrow} \underbrace{\big(x_n y_n,\ x_n^2 + y_n^2,\ \sin(x_n y_n)\big)}_{=f(x_n, y_n)} \to (1,\ 2,\ \sin(1))$$

**Beispiel 19.5.** $D = \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*Behauptung:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ existiert nicht!}$$

**Beweis:**

$$f(x,0) = 0,\ f(x,x) = \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

d.h. ist z.B. $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$, so gilt $(x_n, y_n) \to (0,0)$ und $f(x_n, y_n) = 0 \to 0$.

Ist aber $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, so gilt wieder $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \to (0,0)$, aber $f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$. □

**Definition 19.6.**

(1) $f$ heißt in $x_0 \in D$ *stetig*, wenn gilt:

Für jede Folge $(x^{(k)})$ in $D$ mit $x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x_0$ gilt $f(x^{(k)}) \to f(x_0)$ für $k \to \infty$.

Wie im eindimensionalen Fall (vgl. 7.3) zeigt man:

$$f \text{ stetig in } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\ \Big[\|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \big\|f(x) - f(x_0)\big\| < \varepsilon\Big]$$

(2) $f$ heißt *stetig auf* $D$, wenn $f$ in jedem $x_0 \in D$ stetig ist. Wir schreiben in diesem Fall auch:

$$f \in C(D, \mathbb{R}^m)$$

**Beachte:** Beim Stetigkeitsbegriff ist $\delta$ abhängig von $\varepsilon$ *und* $x_0$.

(3) $f$ heißt auf $D$ *gleichmäßig stetig*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in D \quad \Big[\|x - y\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \big\|f(x) - f(y)\big\| < \varepsilon\Big]$$

(4) $f$ heißt auf $D$ Lipschitz–*stetig*, wenn ein $L \geq 0$ existiert mit

$$\forall x, y \in D \quad \Big[\big\|f(x) - f(y)\big\| \leq L \cdot \|x - y\|\Big]$$

**Klar:** Lipschitz–Stetigkeit $\Rightarrow$ gleichmäßige Stetigkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit

**Satz 19.7.** Sei $x_0 \in D,\ g : D \to \mathbb{R}^m$

(1) Ist $f = (f_1, \dots, f_m)$, so gilt:

$$f \left| \begin{array}{l} \text{stetig in } x_0 \\ \text{stetig auf } D \\ \text{gleichmäßig stetig auf } D \\ \text{Lipschitz–stetig auf } D \end{array} \right| \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, m\}\ f_j \left| \begin{array}{l} \text{stetig in } x_0 \\ \text{stetig auf } D \\ \text{gleichmäßig stetig auf } D \\ \text{Lipschitz–stetig auf } D \end{array} \right| .$$

(2) Ist $x_0$ außerdem Häufungspunkt von $D$, so gilt:

$$f \text{ stetig in } x_0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(3) Ist $f$ stetig in $x_0$ und $f(x_0) \neq 0$, so existiert $\delta > 0$ mit

$$\forall x \in D \cap U_\delta(x_0) \quad f(x) \neq 0$$

(4) Ist $m = 1$ und sind $f, g$ stetig in $x_0$ und ist $g(x_0) \neq 0$, so existiert $\delta > 0$ mit

$$\frac{f}{g} : D \cap U_\delta(x_0) \to \mathbb{R} \text{ ist stetig in } x_0$$

(5) Sind $f, g$ stetig in $x_0$ und ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so sind $f + g,\ \alpha f,\ f \cdot g$ stetig in $x_0$.

(6) $C(D, \mathbb{R}^m)$ ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum.

**Beweis:** (1) mit 18.3, Rest wie im eindimensionalen Fall (vgl. 7.3 und 7.4) □

**Satz 19.8.** Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig in $x_0 \in D$; ferner sei $E \subset \mathbb{R}^m,\ g : E \to \mathbb{R}^p,\ f(D) \subset E$, $g$ sei stetig in $y_0 := f(x_0)$.

Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}^p$ stetig in $x_0$.

**Beweis:** wie im eindimensionalen Fall (vgl. 7.5) □

**Satz 19.9.** $D \subset \mathbb{R}^n$ sei *kompakt* und $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$. Dann gilt:

(1) $f$ ist gleichmäßig stetig auf $D$.

(2) Ist $m = 1$, so existieren $a, b \in D$ mit

$$\forall x \in D \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

(„Stetiges $f$ nimmt auf kompakten Mengen Minimum und Maximum an!“)

(3) $f(D)$ ist kompakt.

(4) Ist $f$ injektiv auf $D$, so ist $f^{-1} : f(D) \to D$ stetig.

**Beweis:**

(1) – (3) wie im eindimensionalen Fall (vgl. 7.30)

(4) Sei $y_0 \in f(D), (y^{(k)})$ Folge in $f(D)$ mit $y^{(k)} \to y_0$.

Seien $x_0 := f^{-1}(y_0),\ x^{(k)} := f^{-1}(y^{(k)})$ für $k \in \mathbb{N}$.

*Annahme:* $x^{(k)} \not\to x_0$.

Dann existiert $\varepsilon > 0$ und Teilfolge $(x^{(k_j)})$ mit

$$\left\| x^{(k_j)} - x_0 \right\| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}$$

Da $D$ kompakt, existiert eine konvergente Teilfolge $\left(x^{(k_{j_\nu})}\right)_{\nu \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x_1 \in D$.

Da $f$ stetig, gilt $f\left(x^{(k_{j_\nu})}\right) \xrightarrow{\nu \to \infty} f(x_1)$. Andererseits $f\left(x^{(k_{j_\nu})}\right) = y^{(k_{j_\nu})} \to y_0$

$\Rightarrow\ f(x_1) = y_0 = f(x_0) \underset{\text{inj.}}{\Rightarrow} x_1 = x_0$

Andererseits $\left\|x^{(k_j)} - x_0\right\| \geq \varepsilon$

$$\|\underbrace{x^{(k_{j_\nu})}}_{\to x_1} - x_0\| \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|x_1 - x_0\| \geq \varepsilon \quad ↯$$

□

**Achtung:** In (4) ist die Kompaktheitsvoraussetzung wesentlich!

**Beispiel 19.10.** $D := [0, 2\pi),\ f(x) := \big(\cos(x), \sin(x)\big)$

$f$ stetig, injektiv, aber $f^{-1}$ ist nicht stetig in $(1,0)$. (vgl. Abb. 19.3)

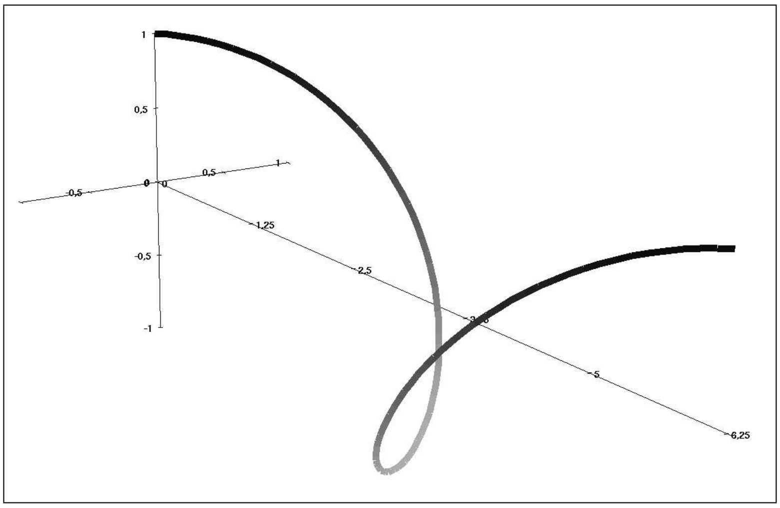



Abbildung 19.3.: $f(x) = \big(\cos(x), \sin(x)\big)$ (Schraubenlinie um $x$–Achse)

**Beispiel 19.11.** $D = \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Da $(0,0)$ Häufungspunkt von $\mathbb{R}^2 = D$ und $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht existiert (Bsp. 19.5), ist $f$ in $(0,0)$ *nicht stetig.*

**Definition 19.12.** $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt *beschränkt*, wenn ein $\gamma \geq 0$ existiert mit

$$\forall x \in D \quad \left\| f(x) \right\| \leq \gamma \qquad (\Leftrightarrow f(D) \text{ ist beschränkt})$$

Betrachte den Spezialfall *linearer Abbildungen*:

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, d.h.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y). \tag{19-i}$$

Lineare Algebra $\Rightarrow$ Es existiert eine $m \times n$–Matrix $A$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = Ax \quad (:= A \cdot x^\top)$$

(Ist umgekehrt $A$ eine $m \times n$–Matrix und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $g(x) := Ax$, so ist $g$ linear.)

Sind nun $f$ und $A$ wie in (19-i), so gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \left\| f(x) \right\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \left\| f(x) - f(y) \right\| \underset{\text{lin.}}{=} \left\| f(x - y) \right\| \leq \|A\| \cdot \|x - y\|$$

$\Rightarrow$ $f$ ist auf $\mathbb{R}^m$ Lipschitz–*stetig* mit Lipschitz–Konstante $L := \|A\|$

Insbesondere:

**Satz 19.13.** Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, so gilt

$$f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

# 20. Folgen, Reihen, Potenzreihen und Stetigkeit in $\mathbb{C}$

Sowohl $\mathbb{C}$ als auch $\mathbb{R}^2$ sind zweidimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$.

„Identifiziere“ wie folgt:

| | |
|---|---|
| $z = x + iy \in \mathbb{C}\ (x, y \in \mathbb{R})$ | $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ |
| $\operatorname{Re} z = x$ | $x$ |
| $\operatorname{Im} z = y$ | $y$ |
| $\lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$ | $\lVert(x, y)\rVert = \sqrt{x^2 + y^2}$ |
| $w = u + iv$ | $(u, v)$ |
| $z + w = (x + u) + i(y + v)$ | $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ |

Wegen dieser Identifikationen gelten die in den Abschnitten 18 und 19 entwickelten Begriffe und Sätze auch in $\mathbb{C}$. (Gewisse Ausnahme: Inneres Produkt in $\mathbb{R}^2$ hat (bisher) kein Analogon in $\mathbb{C}$.)

## 20.1. Konvergenz von Folgen

Eine Folge $(z_n)$ in $\mathbb{C}$ heißt *konvergent*, wenn ein $z_0 \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$|z_n - z_0| \to 0$$

In diesem Fall ist $z_0$ eindeutig bestimmt und man schreibt

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n, \qquad \text{oder: } z_n \to z_0 \text{ für } n \to \infty.$$

Es gilt:

$$z_n \to z_0 \text{ für } n \to \infty \iff \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0,\ \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0$$

Zu den Sätzen in Abschnit 18 kommt hinzu:

**Satz 20.1.** $(z_n), (w_n)$ seien Folgen in $\mathbb{C}$.

(1) Aus $z_n \to z_0$, $w_n \to w_0$ folgt: $z_n w_n \to z_0 w_0$.

(2) Gilt außerdem $w_0 \neq 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0\ w_n \neq 0$ und $\frac{z_n}{w_n} \to \frac{z_0}{w_0}$.

**Beweis:** wie im eindimensionalen Fall (vgl. 2.12 (4)) □

## 20.2. Unendliche Reihen

Sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $\forall n \in \mathbb{N}\ \ s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ heißt } \textit{konvergent} \quad :\Leftrightarrow \quad (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent}$$

In diesem Fall heißt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n$$

*Reihenwert.*

Eine nicht konvergente Reihe heißt *divergent.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ heißt } \textit{absolut konvergent} \quad :\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergent.}$$

*Wörtlich* wie im eindimensionalen Fall (vgl. 3.4, 3.12, 3.14, 3.16, 3.25) gelten die Aussagen von

**Satz 20.2.**

(1) Cauchy–Kriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n \geq n_0 \quad \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent}$$

und

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

(3) Majoranten– und Minorantenkriterium:

$(\alpha_n)$ *reelle* Folge, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ konvergent, $(a_n)$ *komplexe* Folge, $\forall n \in \mathbb{N}\ \ |a_n| \leq \alpha_n$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

(4) Wurzel– und Quotientenkriterium

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *absolut* konvergent,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ absolut konvergent, und}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

(Cauchy–Produkt)

## 20.3. Komplexe Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{C}$ mit $D \neq \emptyset$ und $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0$ heißt Häufungspunkt von $D$ :$\Leftrightarrow$ Es existiert Folge $(z_n)$ in $D$ mit $\forall n \in \mathbb{N}$ $z_n \neq z_0$ und $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$.

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Die Begriffe *Grenzwert* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, *Stetigkeit* von $f$ in $z_0$, *Stetigkeit* von $f$ auf $D$ werden (gemäß der genannten Identifikationen) wie im Reellen (Abschnitt 19) definiert.

Die dazugehörigen Sätze (19.3, 19.7, 19.8) gelten genauso auch für komplexe Funktionen.

**Neu:**

**Satz 20.3.** *$D \subset \mathbb{C}$; $f, g : D \to \mathbb{C}$ Funktionen.*

(1) Ist $z_0$ Häufungspunkt von $D$ und gilt

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0, \qquad \lim_{z \to z_0} g(z) = w_1,$$

so gilt:

$$\lim_{z \to z_0} (f \cdot g)(z) = w_0 \cdot w_1 \qquad \text{(Produkt in } \mathbb{C})$$

Ist außerdem $w_1 \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\forall z \in U_\delta(z_0) \cap D \quad g(z) \neq 0,$$

und

$$\frac{f}{g}(z) \xrightarrow{z \to z_0} \frac{w_0}{w_1}$$

(2) $f, g$ stetig in $z_0 \Rightarrow fg$ stetig in $z_0$.

## 20.4. Potenzreihen

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$; $z_0 \in \mathbb{C}$.

Dann heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

eine *Potenzreihe*.

Wie im eindimensionalen Fall (vgl. 4.3) zeigt man

**Satz 20.4.**

(1) Ist $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, so konvergiert die Potenzreihe nur für $z = z_0$.

(2) Ist $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und

$$\varrho := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

so gilt:

(i) Ist $\varrho = 0$, so konvergiert die Potenzreihe für *alle* $z \in \mathbb{C}$ *absolut.*

(ii) Ist $\varrho > 0$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für

$$|z - z_0| < \frac{1}{\varrho}$$

und sie divergiert für $|z - z_0| > \frac{1}{\varrho}$.

(Im Falle $|z - z_0| = \frac{1}{\varrho}$ ist keine allgemeine Aussage möglich.)

Setze:

$$r := \begin{cases} 0 & \text{falls } \sqrt[n]{|a_n|} \text{ unbeschränkt} \\ \infty & \text{falls } \sqrt[n]{|a_n|} \text{ beschränkt, } \varrho = 0 \\ \frac{1}{\varrho} & \text{falls } \sqrt[n]{|a_n|} \text{ beschränkt, } \varrho > 0 \end{cases}$$

$r$ heißt der *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

D.h.:

- Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe in jedem $z \in \mathbb{C}$.
- Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur in $z = z_0$.
- Ist $0 < r < \infty$, so konvergiert die Potenzreihe im (Inneren des) *Kreises* $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, und sie divergiert für $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$. (vgl. Abb. 20.1)

**Beispiel 20.5.**

(1) Sei $\omega \in \mathbb{C}$. Betrachte die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \omega^n$:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} \omega^i \underset{\text{wie in } \mathbb{R}}{=} \begin{cases} \frac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega} & \text{falls } \omega \neq 1 \\ n+1 & \text{falls } \omega = 1 \end{cases}$$

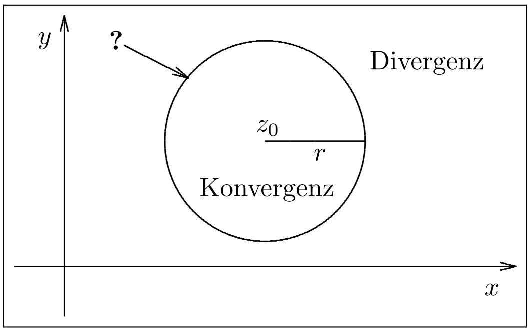



Abbildung 20.1.: Konvergenzradius, Konvergenz und Divergenz

$$|\omega| < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \text{ ist konvergent mit Reihenwert } \frac{1}{1-\omega}$$

$$|\omega| > 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \text{ ist divergent}$$

(2) Speziell $\omega = \frac{i}{2}$:

$$|\omega| = \frac{1}{2} < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{i}{2}} = \frac{2}{2-i} = \frac{4+2i}{4+1} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$($= e^z$; vgl. Kapitel 15) , $z \in \mathbb{C}$:

$$a_n := \frac{z^n}{n!}, \quad |a_n| = \frac{|z|^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ ist konvergent mit Reihenwert } e^{|z|}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ ist absolut konvergent } \forall z \in \mathbb{C}$$

(4) Genau so: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}(= \cos z)$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}(= \sin z)$

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{nz} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (e^n)^z$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) = e^x \cdot e^{iy}$$

$$\Rightarrow \; |e^z| = e^x \cdot |e^{iy}| = e^x \;\Rightarrow\; \Big(|e^z| < 1 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z < 0\Big)$$

Also: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{nz}$ ist konvergent falls $\operatorname{Re} z < 0$. Dann: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{nz} = \frac{1}{1-e^z}$

Ist $D \subset \mathbb{C}$ und $(f_n)$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, so definiert man die Begriffe *punktweise* Konvergenz und *gleichmäßige* Konvergenz wörtlich wie im eindimensionalen Fall (vgl. Abschnitte 8.1 und 8.2).

Wie im Eindimensionalen zeigt man:

**Satz 20.6.**

(1) $D$, $(f_n)$ wie oben. Sind alle $f_n$ stetig auf $D$ und konvergiert $(f_n)$ *gleichmäßig* gegen $f : D \to \mathbb{C}$, dann ist $f$ stetig auf $D$.

(2) Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $D := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < r\}$. ($D := \mathbb{C}$, falls $r = \infty$), und

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{für } z \in D.$$

Dann gilt:

(i) $f$ ist stetig auf $D$.

(ii) Ist $\tilde{r} > 0$ mit $\tilde{r} < r$, so konvergiert die Potenzreihe auf

$$\tilde{D} := \left\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| \le \tilde{r}\right\} \ \textit{gleichmäßig}$$

(vgl. Abb 20.2)

$e^z$, cos, sin sind *stetig* auf $\mathbb{C}$.

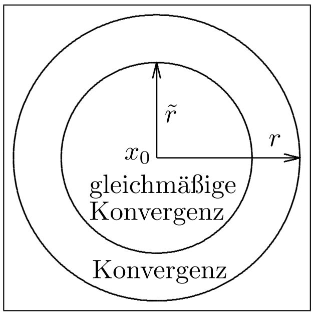



Abbildung 20.2.: Potenzreihen konvergieren glm. auf kompakten Teilmengen des Konvergenzkreises

Zum Abschluss:

$$\begin{aligned}
\sinh z &:= \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) && z \in \mathbb{C}\\
\cosh z &:= \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) && z \in \mathbb{C}\\
\tanh z &:= \frac{\sinh z}{\cosh z} && z \in \mathbb{C},\ \cosh z \neq 0\\
\tan z &:= \frac{\sin z}{\cos z} && z \in \mathbb{C},\ \cos z \neq 0
\end{aligned}$$

# 21. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

## 21.1. Partielle Differenzierbarkeit

**Beispiel 21.1.** Sei $f(x, y) := 2x^2y^3$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Fasst man für den Moment $y$ als Konstante auf, so kann man $f(x, y)$ *nach* $x$ differenzieren. Diese Ableitung wird mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{oder} \quad f_x(x, y) \quad \text{oder} \quad D_1\, f(x, y) \quad \text{bezeichnet.}$$

Also im Beispiel:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4xy^3$$

Entsprechend kann man $x$ als Konstante auffassen und nach $y$ differenzieren. Bezeichnung

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \quad \text{oder} \quad f_y(x, y) \quad \text{oder} \quad D_2\, f(x, y)$$

Im Beispiel:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x^2y^2$$

**Beispiel 21.2.** $f(x, y, z) := x^2z + 3xyz$. Dann:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = f_x(x, y, z) = D_1\, f(x, y, z) = 2xz + 3yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = f_y(x, y, z) = D_2\, f(x, y, z) = 3xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = f_z(x, y, z) = D_3\, f(x, y, z) = x^2 + 3xy$$

*Stets in diesem Abschnitt:* $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion.

Sei $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n}) \in D$, sei $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, und $e_i$ der $i$-te Einheitsvektor.

Da $D$ offen, existiert $\delta > 0$ mit $x_0 + he_i \in D$ für $0 < |h| < \delta$.
(Beachte $\|(x_0 + he_i) - x_0\| = \|he_i\| = |h| \cdot \|e_i\| = |h| < \delta$)

$$f(x_0 + he_i) = f(x_{0,1},\ x_{0,2}, \ldots,\ x_{0,i-1},\ x_{0,i} + h,\ x_{0,i+1}, \ldots,\ x_{0,n})$$

**Definition 21.3.** $f$ heißt *in $x_0$ partiell differenzierbar nach $x_i$*, wenn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} \quad \textit{existiert} \text{ (in } \mathbb{R})$$

Im Fall der Existenz heißt der Grenzwert *partielle Ableitung von $f$ in $x_0$ nach $x_i$* und wird notiert als

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad \text{oder} \quad f_{x_i}(x_0) \quad \text{oder} \quad D_i\, f(x_0)$$

**Bemerkung 21.4.** Im Fall $n = 2$ wird (wie vereinbart) häufig $(x, y)$ statt $(x_1, x_2)$ geschrieben, im Fall $n = 3$ häufig $(x, y, z)$ statt $(x_1, x_2, x_3)$. Ensprechend werden die partiellen Ableitungen notiert:

$$f_x,\ f_y,\ f_z \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

**Beispiel 21.5.**

(1) $f(x, y, z) = 2x^2 + yz + e^{xyz}$

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= 4x + yz \cdot e^{xyz} \\ f_y(x, y, z) &= z + xz \cdot e^{xyz} \\ f_z(x, y, z) &= y + xy \cdot e^{xyz} \end{aligned}$$

(2)

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f_x(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Im Nullpunkt:

$$\frac{f\big((0, 0) + he_1\big) - f(0, 0)}{h} = \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0 \quad (\to 0 \text{ für } h \to 0)$$

$\Rightarrow$ $f$ in $(0, 0)$ partiell nach $x$ differenzierbar und $f_x(0, 0) = 0$.

Genauso: $f_y(0, 0) = 0$.

Also: $f$ ist überall (auf ganz $\mathbb{R}^2$) partiell differenzierbar, aber in $(0, 0)$ nicht stetig.

(3) $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$.

$(x, y) \neq 0$:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ f_y(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Im Nullpunkt:

$$\frac{f\big((0,0)+he_1\big)-f(0,0)}{h}=\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{\sqrt{h^2+0^2}-0}{h}=\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1 & \text{für } h>0\\ -1 & \text{für } h<0\end{cases}$$

konvergiert *nicht* für $h \to 0$.

D.h. $f$ ist in (0,0) nicht partiell differenzierbar nach $x$. (genauso: nach $y$)

**Definition 21.6.**

(1) $f$ heißt in $x_0$ partiell differenzierbar, wenn $f$ in $x_0$ partiell differenzierbar nach allen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist.

(2) $f$ heißt auf $D$ partiell differenzierbar, wenn $f$ in jedem $x_0 \in D$ partiell differenzierbar ist.

(3) $f$ heißt auf $D$ *stetig partiell differenzierbar*, wenn $f$ auf $D$ partiell differenzierbar ist und *alle* partiellen Ableitungen $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n} : D \to \mathbb{R}$ auf $D$ *stetig* sind.

Bezeichnungen in diesem Fall: $f \in C^1(D, \mathbb{R})$.

(4) Ist $f$ in $x_0 \in D$ partiell differenzierbar, so heißt

$$\big(f_{x_1}(x_0),\ f_{x_2}(x_0), \ldots, f_{x_n}(x_0)\big) =: (\operatorname{grad} f)(x_0)$$

der *Gradient* von $f$ in $x_0$.

**Beispiel 21.7.** $f(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Für $x \neq 0$:

$$f_{x_i}(x) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}} = \frac{x_i}{\|x\|}$$

$$\Rightarrow\ (\operatorname{grad} f)(x) = \left(\frac{x_1}{\|x\|}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|}\cdot x$$

**Definition 21.8.** Die partiellen Ableitungen $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}$ heißen (sofern sie existieren) partielle Ableitungen *erster Ordnung*.

**Definition 21.9.** Ist $f$ auf $D$ partiell differenzierbar nach $x_i$ und ist $f_{x_i} : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ partiell differenzierbar nach $x_j$, so heißt

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)(x_0) &= (f_{x_i})_{x_j}(x_0) = \big(D_j(D_i f)\big)(x_0)\\ =\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(x_0) &= f_{x_i x_j}(x_0) = \big(D_j(D_i f)\big)(x_0)\end{aligned}$$

partielle Ableitung *zweiter Ordnung* (nach $x_i$ und $x_j$).

Im Falle $i = j$ schreibt man auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) = f_{x_i x_i}(x_0) = \left(D_i^2 f\right)(x_0)$$

Entsprechend sind partielle Ableitungen höherer Ordnung definiert. Schreibweise analog.

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1\,(\partial x_3)^2\,\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\right)\right)$$

$n = 2$:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2} = f_{xxy}, \quad \frac{\partial^7 f}{\partial x^6\, \partial y} = f_{yxxxxxx}$$

**Beispiel 21.10.** $f(x,y,z) := xy^2 \sin z$

$$f_x = y^2 \sin z, \quad f_{xy} = 2y \sin z, \quad f_{xyz} = 2y \cos z$$

$$f_z = xy^2 \cos z, \quad f_{zy} = 2xy \cos z, \quad f_{zyx} = 2y \cos z$$

**Definition 21.11.** Sei $m \in \mathbb{N}$. $f$ heißt auf $D$ *$m$-mal stetig partiell differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq m$ auf $D$ existieren und auf $D$ *stetig* sind.

Bezeichnung in diesem Fall: $f \in C^m(D, \mathbb{R})$.

$f$ heißt auf $D$ *unendlich oft* (beliebig oft) (stetig) *partiell differenzierbar*, wenn

$$f \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(D, \mathbb{R}) =: C^\infty(D, \mathbb{R})$$

**Satz 21.12** (Satz von Schwarz)**.** Sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ (beachte: die 2. partiellen Ableitungen sind somit als *stetig* vorausgesetzt.)

Dann gilt:

$$f_{x_i x_j}(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$$

für alle $x_0 \in D$ und für alle $i, j \in \{1, \ldots n\}$.

**Korollar 21.13.** Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f \in C^m(D, \mathbb{R})$.

Dann ist jede partielle Ableitung von $f$ der Ordnung $\leq m$ unabhängig von der Reihenfolge bei der partiellen Differentiation.

**Beispiel 21.14.**

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_x(x,y) = \frac{\left[y\left(x^2-y^2\right) + 2x^2 y\right]\left(x^2+y^2\right) - 2x^2 y\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Im Nullpunkt:

$$\frac{f\big((0,0) + he_1\big) - f(0,0)}{h} = \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$\Rightarrow\ f_x(0,0) = 0$.

($\Rightarrow f$ ist auf $D = \mathbb{R}^2$ partiell nach $x$ differenzierbar.)

$$\frac{f_x\big((0,0)+he_2\big) - f_x(0,0)}{h} = \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{-h^3h^2}{h^4}\right) = -1 \quad (\to -1 \text{ für } h \to 0)$$

$\Rightarrow$ $f_x$ in $(0,0)$ partiell nach $y$ differenzierbar, und $f_{xy}(0,0) = -1$.

Analog: $f$ ist auf $D = \mathbb{R}^2$ partiell nach $y$ differenzierbar und

$$f_y(x,y) = -\frac{\left[x\left(y^2-x^2\right)+2y^2x\right]\left(y^2+x^2\right) - 2y^2x\left(y^2-x^2\right)}{\left(y^2+x^2\right)^2}$$

$$\frac{f_y\big((0,0)+he_1\big) - f_y(0,0)}{h} = 1$$

$\Rightarrow$ $f_y$ in $(0,0)$ partiell nach $x$ differenzierbar, und $f_{yx}(0,0) = 1 \neq f_{xy}(0,0)$. (Aber $f_{xy}$ und $f_{yx}$ sind *nicht stetig* in $(0,0)$.)

Zur Motivation des folgenden:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar, aber nicht stetig in $(0,0)$.

Wir suchen jetzt einen Differenzierbarkeitsbegriff, der Stetigkeit (von $f$) impliziert.

Zur Erinnerung: Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$

$f$ in $x_0$ differenzierbar

$$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = a$$

$$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - ah}{h} = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - ah|}{|h|} = 0$$

Jetzt wieder: $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

## 21.2. Differenzierbarkeit und Stetigkeit

**Definition 21.15.** $f$ heißt in $x_0$ *differenzierbar*

$$:\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}^n}} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - a\cdot h|}{\|h\|} = 0$$

$$\left(\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}^n}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - a\cdot h}{\|h\|} = 0\right)$$

**Bemerkung 21.16.**

(1) Ist $a \in \mathbb{R}^n$, so ist die Abbildung $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ h \mapsto a \cdot h \end{array} \right\}$ *linear* und somit *stetig*, insbesondere gilt: $a \cdot h \to 0$ für $h \to 0$.

(2) $f$ differenzierbar in $x_0 \in D$

$$\Leftrightarrow \ \exists a \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

**Satz 21.17.** $f$ sei differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann gilt:

(1) $f$ ist in $x_0$ partiell differenzierbar, und der Vektor $a$ in der Definition der Differenzierbarkeit ist eindeutig bestimmt, und

$$a = (\operatorname{grad} f)(x_0)$$

(2) $f$ ist stetig in $x_0$.

**Beweis:**

(1) Sei $a = (a_1, \dots, a_n)$ ein Vektor, der die in der Definition für Differenzierbarkeit (von $f$ in $x_0$) geforderten Eigenschaft hat. Das heißt: Für jede Folge $\left(k^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ mit $\forall k \in \mathbb{N}\ h^{(k)} \neq 0$ und $h^{(k)} \to 0$ (für $k \to \infty$) gilt

$$L\left(h^{(k)}\right) := \frac{\left|f\left(x_0 + h^{(k)}\right) - f(x_0) - a \cdot h^{(k)}\right|}{\left\|h^{(k)}\right\|} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Sei $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$ mit $\forall k \in \mathbb{N}\ \alpha_k \neq 0$ und $\alpha_k \to 0$

Setze

$$h^{(k)} := \alpha_k e_1 = (\alpha_k, 0, \dots, 0)$$

Also $\forall k\ h^{(k)} \neq 0$, $h^{(k)} \to 0$ und somit $L\left(h^{(k)}\right) \to 0$, d.h.

$$\frac{|f(x_0 + \alpha_k e_1) - f(x_0) - \alpha_k a_1|}{|\alpha_k|} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

$$\Rightarrow \ \frac{f(x_0 + \alpha_k e_1) - f(x_0) - \alpha_k a_1}{\alpha_k} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

$$\Rightarrow \ \frac{f(x_0 + \alpha_k e_1) - f(x_0)}{a_k} \xrightarrow{k \to \infty} a_1$$

$\Rightarrow f$ ist in $x_0$ partiell differenzierbar nach $x_1$, und $f_{x_1}(x_0) = a_1$

Analog andere Komponenten. $\Rightarrow$ Behauptung.

(2) Setze

$$\varrho(h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - a \cdot h}{\|h\|}$$

(mit $a$ aus Definition der Differenzierbarkeit)

Dann $\varrho(h) \to 0$ für $h \to 0$ gemäß Definition.

Also

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{a \cdot h}_{\to 0} + \underbrace{\|h\| \cdot \varrho(h)}_{\xrightarrow{h\to 0} 0} \xrightarrow{h\to 0} f(x_0)$$

$\Rightarrow$ $f$ stetig in $x_0$

□

**Definition 21.18.** Sei $f$ differenzierbar in $x_0$ und $a$ der (eindeutige) Vektor mit der Eigenschaft in der Definition der Differenzierbarkeit (21.15).

Dann heißt

$$a =: f'(x_0) \qquad (\in \mathbb{R}^n)$$

*Ableitung* von $f$ in $x_0$.

Es gilt also nach Satz 21.17:

$f$ differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f$ partiell differenzierbar in $x_0$ und

$$f'(x_0) = (\operatorname{grad} f)(x_0)$$

**Achtung:**

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist *partiell* differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$, aber *nicht stetig* in $(0,0)$, also nach 21.17 auch *nicht differenzierbar* in $(0,0)$.

**Beispiel 21.19.** $f(x,y) = x \cdot y$

$$\Rightarrow \ (\operatorname{grad} f)(x,y) = (y,x)$$

Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{f\big((x,y)+(h_1,h_2)\big) - f(x,y) - (\operatorname{grad} f)(x,y)\cdot h}{\|(h_1,h_2)\|} \\
&= \frac{(x+h_1)(y+h_2) - xy - (yh_1 + xh_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&= \frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| = \frac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \frac{\frac{1}{2}\left(h_1^2+h_2^2\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{h_1^2+h_2^2} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

$\Rightarrow$ $f$ ist in $(x,y)$ differenzierbar und $f'(x,y) = (y,x)$.

**Satz 21.20.** $f$ sei auf $D$ partiell differenzierbar und die partiellen Ableitungen $f_{x_1},\ldots,f_{x_n} : D \to \mathbb{R}$ seien *stetig* in $x_0 \in D$.

Dann ist $f$ auch in $x_0$ differenzierbar.

(ohne Beweis)

**Definition 21.21.** $f$ heißt *differenzierbar auf* $D$, wenn $f$ in jedem $x_0 \in D$ differenzierbar ist.

**Korollar 21.22.** $f \in C^1(D, \mathbb{R}) \;\Rightarrow\; f$ ist in jedem $x_0 \in D$ differenzierbar.

**Definition 21.23.** Sei $m \in \mathbb{N}$. $f$ heißt *$m$-mal stetig differenzierbar*, wenn $f \in C^m(D, \mathbb{R})$.

**Definition 21.24.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $g : I \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, also $g(t) = \big(g_1(t), \dots, g_n(t)\big)$ (für $t \in I$) mit $g_j : I \to \mathbb{R}$ (für $j = 1, \dots, n$).

$$g \text{ heißt } \left|\begin{array}{l} \text{in } t_0 \in I \text{ differenzierbar} \\ \text{auf } I \text{ differenzierbar} \\ \text{auf } I \text{ stetig differenzierbar} \end{array}\right| :\Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\}\; g_j \left|\begin{array}{l} \text{in } t_0 \text{ differenzierbar} \\ \text{auf } I \text{ differenzierbar} \\ \text{auf } I \text{ stetig differenzierbar} \end{array}\right|$$

In diesem Fall: $g'(t_0) := \big(g_1'(t_0), \dots, g_n'(t_0)\big)$

**Beispiel 21.25.**

(1) $g(t) := (\cos t,\ \sin t)$

$$\Rightarrow \quad g'(t) = (-\sin t,\ \cos t)$$

(2) $g(t) := a + t(b - a)$ für $t \in [0, 1]$; $a, b \in \mathbb{R}^n$ fest

$$\Rightarrow \quad g'(t) = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2, \dots) = b - a$$

**Satz 21.26** (Kettenregel, spezielle Form)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $g : I \to \mathbb{R}^n$ sei differenzierbar in $t_0 \in I$; ferner gelte $g(I) \subset D$. $f : D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $x_0 := g(t_0)$.

Dann ist $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $t_0$, und

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(t_0) &= f'\big(g(t_0)\big) \cdot g'(t_0) \\ &= (\operatorname{grad} f)\big(g(t_0)\big) \cdot \big(g_1'(t_0), \dots, g_n'(t_0)\big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}\big(g(t_0)\big) \cdot g_j'(t_0)\end{aligned}$$

Beweis in allgemeinerer Form in Satz 22.8.

**Satz 21.27.** Sind $f, h : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar, so ist auch $\alpha f + \beta h$ in $x_0$ differenzierbar ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), und

$$(\alpha f + \beta h)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta h'(x_0)$$

(Beweis selbst)

**Definition 21.28.**

(1) Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$

$$S[a,b] := \{a + t(b-a) : \ t \in [0,1]\}$$

heißt *Verbindungsstrecke* von $a$ und $b$.

(2) $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn gilt:

$$\forall a, b \in M \quad S[a,b] \subset M$$

(vgl. Abb. 21.1)

(3) Seien $x_0, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$;

$$S[x_0, \ldots, x_m] := \bigcup_{j=1}^{m} S[x_{j-1}, x_j]$$

heißt *Streckenzug* durch $x_0, \ldots, x_m$. (vgl. Abb. 21.2)

(4) $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Gebiet*, wenn gilt

i) $G$ ist offen

ii) $\forall a, b \in G \ \exists x_0, \ldots, x_m \in G \quad x_0 = a, \ x_m = b \quad S[x_0, \ldots, x_m] \subset G$

(vgl. Abb. 21.3)

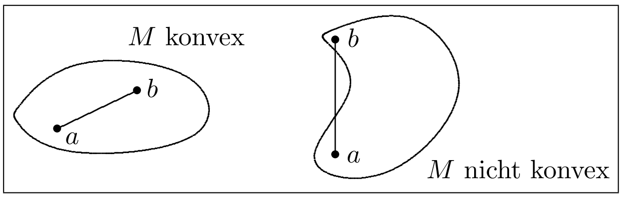



Abbildung 21.1.: Konvexe und nicht konvexe Mengen

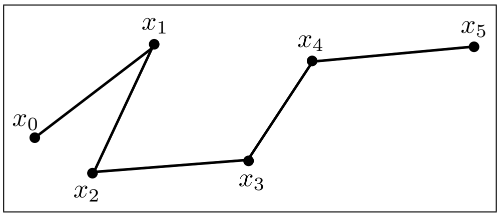



Abbildung 21.2.: Streckenzug

**Satz 21.29** (Mittelwertsatz)**.** $f : D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf $D$. Es seien $a, b \in D$ mit $S[a,b] \subset D$. Dann existiert ein $\xi \in S[a,b]$ mit

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a)}$$

**Beweis:** Setze $g(t) := a + t(b-a)$ für $t \in [0,1]$. Dann $g([0,1]) = S[a,b] \subset D$. Setze $\phi(t) :=$

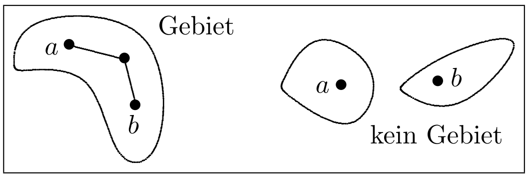



Abbildung 21.3.: Gebiet

$f(g(t))$.

Nach Kettenregel: $\phi$ differenzierbar auf $[0,1]$ und

$$\phi'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = f'\big(a + t(b-a)\big) \cdot (b-a)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ f(b) - f(a) &= f\big(g(1)) - f(g(0)\big) = \phi(1) - \phi(0) \underset{\text{MWS}}{=} \phi'(\eta) \cdot (1-0) = \phi'(\eta) \qquad \eta \in [0,1] \\ &= f'\big(\underbrace{a + \eta(b-a)}_{=:\xi \in S[a,b]}\big) \cdot (b-a) \end{aligned}$$

□

**Korollar 21.30.** Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, und $f, g : G \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf $G$.

(1) $f$ ist konstant auf $G \Leftrightarrow \forall x \in G\ \ f'(x) = 0$

(2) $f' = g'$ auf $G \ \Leftrightarrow\ \exists c \in \mathbb{R}\ \ f = g + c$

**Beweis:**

(1) „$\Leftarrow$" Seien $a, b \in G$. Da $G$ Gebiet, existieren $x_0, \ldots, x_m \in G$, $x_0 = a, x_m = b$, $S[x_0, \ldots, x_m] \subset G$. Sei $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Nach dem Mittelwertsatz 21.29 existiert ein $\xi_j \in S[x_{j-1}, x_j]$ mit

$$f(x_j) - f(x_{j-1}) = \underbrace{f'(\xi_j)}_{=0} \cdot \big(x_j - x_{j-1}\big) = 0$$

$$\Rightarrow\ f(x_j) = f(x_{j-1})$$

$$\Rightarrow\ f(a) = f(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_m) = f(b)$$

$$\Rightarrow\ f \text{ konstant}$$

„$\Rightarrow$" ist trivial.

(2) „$\Rightarrow$": $h := f - g \ \Rightarrow\ h' = 0$ auf $G$

$\underset{(1)}{\Rightarrow}$ $h$ konstant $\Rightarrow$ Behauptung.

„$\Leftarrow$" ist trivial.

□

## 21.3. Die Richtungsableitung

Jedes $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = 1$ heißt auch *Richtungsvektor* oder *Richtung*.

**Definition 21.31.** Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $\|a\| = 1$, und sei $x_0 \in D$. Da $D$ offen ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $x_0 + ta \in D$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < \delta$.

Setze $g(t) := f(x_0 + ta)$ für $-\delta < t < \delta$.

$f$ heißt *in $x_0$ in Richtung $a$ differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} \quad \text{existiert.}$$

$$\left( = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} \right)$$

In diesem Fall heißt

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t}$$

*Richtungsableitung* von $f$ in $x_0$ in Richtung $a$. (siehe Abb. 21.4)

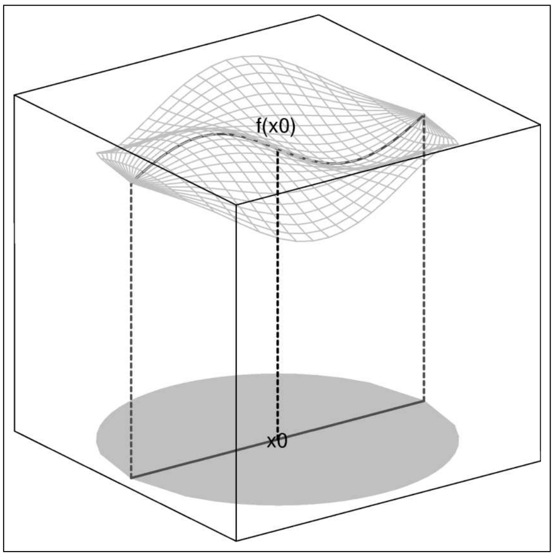



Abbildung 21.4.: Richtungsableitung

*Beachte:* Ist $a = e_j$, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \quad \left(= f_{x_j}(x_0)\right),$$

Existenz vorausgesetzt.

**Beispiel 21.32.**

(1) $f(x, y) := x^2 y + 1$, $x_0 = (0, 0)$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$

$$\frac{f\big((0,0) + ta\big) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{t}\left[\left(\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + 1\right) - 1\right] = \frac{t^2}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{t \to 0} 0$$

D.h. $f$ ist in $(0,0)$ in Richtung $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = 0$.

(2) $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sei $a \in \mathbb{R}^2$ mit $\|a\| = 1$, also $a = (a_1, a_2)$ mit $a_1^2 + a_2^2 = 1$.

$$\frac{f\big((0,0)+ta\big) - f(0,0)}{t} = \frac{f(ta)}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{(ta_1)\cdot(ta_2)}{(ta_1)^2 + (ta_2)^2} = \frac{1}{t} \cdot a_1 a_2$$

Also: $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0)$ existiert $\Leftrightarrow$ $a_1 a_2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $a \in \big\{(1,0),\ (-1,0),\ (0,1),\ (0,-1)\big\}$

**Beispiel 21.33.**

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*Behauptung:*

(1) $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0)$ existiert für *jede* Richtung $a \in \mathbb{R}^2$, $\|a\| = 1$

(2) $f$ ist in $(0,0)$ nicht stetig, also insbesondere nicht differenzierbar.

**Beweis:**

(1) Sei $a \in \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2)$, $a_1^2 + a_2^2 = 1$.

$$\frac{f\big((0,0)+ta\big) - f(0,0)}{t} = \frac{f(ta)}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{(ta_1)(ta_2)^2}{(ta_1)^2 + (ta_2)^4} = \frac{a_1 a_2^2}{a_1^2 + t^2 a_2^4} \begin{cases} \to \frac{a_2^2}{a_1} & a_1 \neq 0 \\ = 0\ (\to 0) & a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial f}{\partial a}(0,0) \text{ existiert und ist } = \begin{cases} \to \frac{a_2^2}{a_1} & a_1 \neq 0 \\ = 0\ (\to 0) & a_1 = 0 \end{cases}.$$

(2) $f(x,0) = 0 \to 0 = f(0,0)$ für $x \to 0$

$f\left(x, \sqrt{x}\right) = \frac{1}{2} \not\to 0$ für $x \to 0$

□

**Bemerkung 21.34.**

$$\frac{f\big(x_0 + t(-a)\big) - f(x_0)}{t} = -\frac{f\big(x_0 + (-t)a\big) - f(x_0)}{-t} \xrightarrow{t\to 0} -\frac{\partial f}{\partial a}(x_0), \quad \text{falls } \frac{\partial f}{\partial a}(x_0) \text{ existiert.}$$

In diesem Fall also

$$\frac{\partial f}{\partial(-a)}(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$$

**Satz 21.35.** Sei $f$ differenzierbar in $x_0 \in D$.

(1) Für jedes $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = 1$ existiert $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$, und

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = (\operatorname{grad} f)(x_0) \cdot a$$

(2) Sei $(\operatorname{grad} f)(x_0) \neq 0$ und $a_0 := \frac{(\operatorname{grad} f)(x_0)}{\|(\operatorname{grad} f)(x_0)\|}$ $(\Rightarrow \|a_0\| = 1)$.

Dann gilt:

$$\forall_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ \|a\|=1 \\ a\neq a_0 \\ a\neq -a_0}} \quad \frac{\partial f}{\partial(-a)}(x_0) < \frac{\partial f}{\partial a}(x_0) < \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0)$$

„Der Gradient zeigt in Richtung des *steilsten Anstieges* von $f$ im Punkt $x_0$."

*Bemerkung zu (1):* Sei $f$ wie in 21.33.

$$\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0) \;=\; \operatorname{grad} f(0,0)\cdot a \quad \forall a \in \mathbb{R}^2$$

Aber für $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ gilt $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \operatorname{grad} f(0,0)\cdot a$

**Beweis:**

(1) Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $\|a\| = 1$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $x_0 + ta \in D$ für $|t| < \delta$. Setze $g(t) := f(x_0 + ta)$ für $|t| < \delta$.

Dann gilt nach der *Kettenregel*:

$g$ differenzierbar in 0, und $g'(0) = f'(x_0)\cdot a = \operatorname{grad} f(x_0)\cdot a$.

Also nach Definition der Richtungsableitung:

$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ existiert und $= g'(0) = \operatorname{grad} f(x_0)\cdot a$.

(2) Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $\|a\| = 1$, $a \neq \pm a_0$. Dann

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)\right| \underset{(1)}{=} \left|\operatorname{grad} f(x_0)\cdot a\right| \underset{(*)}{\leq} \left\|\operatorname{grad} f(x_0)\right\| \cdot \underbrace{\|a\|}_{=1}$$

(*) Da $\operatorname{grad} f(x_0)$ und $a$ *linear unabhänig* sind $(\Leftarrow a \neq \pm a_0)$, gilt *strenge* Ungleichung.

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)\right| < \left\|\operatorname{grad} f(x_0)\right\| \;=\; \operatorname{grad} f(x_0)\cdot \frac{\operatorname{grad} f(x_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|} \;=\; \operatorname{grad} f(x_0)\cdot a_0 \underset{(1)}{=} \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0)$$

□

## 21.4. Der Satz von TAYLOR

Im folgenden sei $f \in C^{p+1}(D,\mathbb{R})$. Führe folgenden Formalismus ein:

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \;\ldots,\; \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \qquad \text{symbolischer Vektor, „Nabla–Operator"}$$

$$\nabla f(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \;\ldots,\; \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right) = (\operatorname{grad} f)(x_0)$$

Sei $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$h\cdot\nabla := h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$\big((h\cdot\nabla)\,f\big)(x_0) := h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)+\dots+h_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$$

$$(h\cdot\nabla)^2 := \left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\cdot\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

$$\left((h\cdot\nabla)^2\,f\right)(x_0) := \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x_0)$$

$$(h\cdot\nabla)^3 := \left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\cdot\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\cdot\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

$$\left((h\cdot\nabla)^3\,f\right)(x_0) := \sum_{i,j,k=1}^{n} h_i h_j h_k\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k}(x_0)$$

Entsprechend *allgemein*:

$$(h\cdot\nabla)^k \qquad \text{für } k\in\{1,\dots,p+1\}$$

$$\left((h\cdot\nabla)^k\,f\right)(x_0) := \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} h_{i_1}\cdot h_{i_2}\cdots h_{i_k}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}\,\cdots\,\partial x_{i_k}}(x_0)$$

**Satz 21.36** (Satz von TAYLOR)**.** Sei $f\in C^{p+1}(D,\mathbb{R})$, $x_0\in D$ und $h\in\mathbb{R}^n$ so, dass $S\,[x_0,x_0+h]\in D$. Dann existiert ein $\xi\in S\,[x_0,x_0+h]$ mit

$$\boxed{\begin{aligned} f(x_0+h) = f(x_0) &+ \frac{1}{1!}\big((h\cdot\nabla)\,f\big)(x_0)+\frac{1}{2!}\left((h\cdot\nabla)^2\,f\right)(x_0)\\ &+\dots+\frac{1}{p!}\big((h\cdot\nabla)^p\,f\big)(x_0)+\underbrace{\frac{1}{(p+1)!}\left((h\cdot\nabla)^{p+1}\,f\right)(\xi)}_{=:R(x_0,h)}\end{aligned}}$$

Weiter gilt für das „Restglied“

$$R(x_0,h)=\frac{1}{p!}\int\limits_0^1(1-s)^p\left[(h\cdot\nabla)^{p+1}\,f\right](x_0+sh)\,ds$$

**Beweis:** Rückführen auf 1-dimensionalen TAYLORschen Satz mittels $g(t) := f(x_0+th)$. □

*Spezialfall* $p=1$, also $f\in C^2(D,\mathbb{R})$.

**Definition 21.37.**

(1) Sei

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

eine relle $n \times n$-Matrix. Die Abbildung $x \mapsto (Ax) \cdot x$ heißt die zu $A$ gehörende *quadratische Form.* Ist $x = (x_1, \dots, x_n)$, dann gilt für die quadratische Form von $x$:

$$x \mapsto (Ax) \cdot x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

(2) Für $x \in D$ setze

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & \cdots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix heißt HESSE–*Matrix* von $f$ im Punkt $x$.

Da nach dem Satz von SCHWARZ (21.12) und $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ gilt $f_{x_j x_k} = f_{x_k x_j}$, ist $H_f(x)$ eine *symmetrische* $n \times n$–Matrix.

Für $h \in \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in D$ gilt also

$$\left((h \cdot \nabla)^2 f\right)(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \cdot \underbrace{f_{x_i x_j}(x_0)}_{(H_f(x_0))_{ij}} = ((H_f(x_0))\, h) \cdot h$$

**Definition 21.38.** Sei $A$ symmetrische $n \times n$–Matrix.

$$A \left| \begin{array}{l} \text{positiv definit} \\ \text{negativ definit} \end{array} \right| :\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (Ax) \cdot x \left| \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array} \right|$$

$$A \text{ indefinit } :\Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (Ax) \cdot x > 0, \;\; (Ay) \cdot y < 0$$

**Achtung:** Es gibt Matrizen, die weder positiv/negativ definit noch indefinit sind, z.B. die Nullmatrix.

**Satz 21.39.** $A$ sei symmetrische $n \times n$-Matrix. Dann gilt:

(1) $A$ ist $\left| \begin{array}{l} \text{positiv definit} \\ \text{negativ definit} \end{array} \right| \Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von $A$ sind $\left| \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array} \right|$.

(2) $A$ ist indefinit $\Leftrightarrow$ Es gibt Eigenwerte $\lambda, \mu$ von $A$ mit $\lambda > 0$, $\mu < 0$.

(3) Sei $n = 2$, also

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } a_{21} = a_{12})$$

Dann gilt:

$$A \text{ positiv definit} \Leftrightarrow \left[\det A > 0 \;\text{ und } a_{11} > 0\right]$$

$$A \text{ negativ definit} \Leftrightarrow \left[\det A > 0 \;\text{ und } a_{11} < 0\right]$$

$$A \text{ indefinit} \Leftrightarrow \det A < 0$$

**Beweis:** siehe Lineare Algebra □

**Definition 21.40.** $f : D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein lokales $\left| \begin{array}{l} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right|$

$$:\Leftrightarrow \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in U_\delta(x_0) \quad \left| \begin{array}{l} f(x) \leq f(x_0) \\ f(x) \geq f(x_0) \end{array} \right|$$

$f$ hat in $x_0$ ein lokales *Extremum* $:\Leftrightarrow$ $f$ hat in $x_0$ ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.

**Satz 21.41.** $f : D \to \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in D$ partiell differenzierbar und habe in $x_0$ ein lokales Extremum. Dann gilt:

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0$$

**Beweis:** $f$ habe in $x_0$ ein lokales Maximum, also existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset D$ und

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Somit: $x_0 + te_1 \in U_\delta(x_0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $|t| < \delta$, also

$$\forall |t| < \delta \quad f(x_0 + te_1) \leq f(x_0)$$

D.h.

$$g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}, \ t \mapsto g(t) := f(x_0 + te_1)$$

hat in $t = 0$ ein lokales Maximum.

$$\underset{9.15}{\Rightarrow} \quad 0 = g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_1) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)$$

Analog: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0 \ \forall j \in \{2, \ldots n\}$, analog lokales Minimum. $\square$

**Bemerkung 21.42.** Ist $a \in \mathbb{R}^n$, $\|a\| = 1$, und existiert $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$, so folgt aus den Voraussetzungen des Satzes 21.41 auch $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = 0$.

**Satz 21.43.** Es sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $x_0 \in D$, $(\operatorname{grad} f)(x_0) = 0$. Dann gilt:

(1) Ist $H_f(x_0)$ positiv definit, so hat $f$ in $x_0$ ein lokales Minimum.

(2) Ist $H_f(x_0)$ negativ definit, so hat $f$ in $x_0$ ein lokales Maximum.

(3) Ist $H_f(x_0)$ indefinit, so hat $f$ in $x_0$ kein lokales Extremum. (vgl. Abb. 21.5)

(4) Ist $H_f(x_0)$ $\left| \begin{array}{l} \text{positiv definit} \\ \text{negativ definit} \end{array} \right|$, dann gilt:

$$\exists \delta > 0 \quad U_\delta(x_0) \subset D \text{ und } \forall \xi \in U_\delta(x_0) \ \ H_f(\xi) \text{ ist } \left| \begin{array}{l} \text{positiv definit} \\ \text{negativ definit} \end{array} \right|$$

(5) Ist $H_f(x_0)$ indefinit, dann gilt:

$$\exists x, y \in \mathbb{R}^n, \delta > 0 \quad \forall \xi \in U_\delta(x_0) \quad ((H_f(\xi))\, x) \cdot x > 0 \text{ und } ((H_f(\xi))\, y) \cdot y < 0$$

($x$ und $y$ sind für die gesamte Umgebung gleich.)

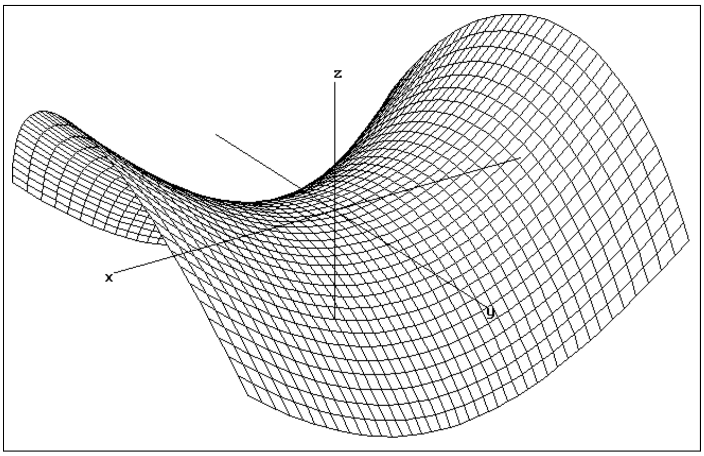



Abbildung 21.5.: Sattelfläche ohne Extremum in $(0, 0)$ trotz $(\operatorname{grad} f)(0, 0) = 0$

**Beweis:**

(1) Sei $H_f(x_0)$ positiv definit.

$$\Rightarrow \ \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \left((h \cdot \nabla)^2 f\right)(x_0) = ((H_f(x_0))h) \cdot h > 0$$

Da $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \quad \left((h \cdot \nabla)^2 f\right)(x) > 0$$

Sei $x \in U_\delta(x_0),\ x \neq x_0,\ h := x - x_0$, also $x = x_0 + h,\ h \neq 0$ und sei außerdem $\|h\| < \delta$. Dann gilt nach dem TAYLORschen Satz 21.36 (beachte $x \in U_\delta(x_0),\ S[x_0, x] \subset U_\delta(x_0) \subset D$; vgl. Abb. 21.6):

$$f(x) = f(x_0) + \big((h \cdot \nabla) f\big)(x_0) + R(x_0, h)$$

mit

$$R(a, h) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - s) \underbrace{\left[(h \cdot \nabla)^2 f\right] \underbrace{(x_0 + sh)}_{\in U_\delta(x_0)}}_{>0} ds > 0$$

$$\Rightarrow \ f(x) > f(x_0)$$

$\Rightarrow f$ hat in $x_0$ ein lokales Minimum. (wegen $x \in U_\delta(x_0)$ beliebig)

(2) analog.

(3) hier weggelassen. (Idee: Wähle $h$ als Eigenvektor, je einen größer und kleiner 0.)

(4) (ohne Beweis)

(5) (ohne Beweis)

□

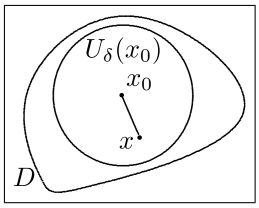



Abbildung 21.6.: Skizze zum Beweis des Satzes 21.43

**Beispiel 21.44.** $D = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := x^3 - 12xy + 8y^3$.

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 12y, & f_y &= -12x + 24y^2 \\ f_{xx} &= 6x, & f_{yy} &= 48y \\ f_{xy} &= -12 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{grad} f = \left(3x^2 - 12y, -12x + 24y^2\right),$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}$$

Also

$$(\operatorname{grad} f)(x,y) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; x^2 = 4y \text{ und } -x + 2y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow\; y = \frac{x^2}{4} \text{ und } x = 2y^2$$

$$\Leftrightarrow\; y = \frac{x^2}{4} \text{ und } \underbrace{x = 2\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 = \frac{x^4}{8}}_{x=0 \text{ oder } x=2}$$

$$\Leftrightarrow\; (x,y) = (0,0) \text{ oder } (x,y) = (2,1)$$

(zwei Kandidaten für relative Extrema; andere gibt es sicher nicht nach 21.41)

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \det H_f(0,0) = -144 < 0$$

$\Rightarrow$ $H_f(0,0)$ indefinit $\underset{21.43}{\Rightarrow}$ $f$ hat in $(0,0)$ *kein* lokales Extremum.

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}; \qquad \underbrace{\det H_f(2,1) = 12 \cdot 48 - 12 \cdot 12 > 0}_{H_f(2,1) \text{ pos. definit}}$$

$\underset{21.43}{\Rightarrow}$ $f$ hat in $(2,1)$ lokales Minimum.

# 22. Differentialrechnung für vektorwertige Funktionen

## 22.1. Allgemeines

Stets in diesem Abschnitt $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen*, $f : (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ *vektorwertige* Funktion.

**Definition 22.1.**

(1) $f$ heißt auf $D$ *$p$-mal stetig differenzierbar* (notiert als $f \in C^p(D, \mathbb{R}^m)$), wenn

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \quad f_j : D \to \mathbb{R}$$

$p$-mal stetig differenzierbar ist (d.h. $f_j \in C^p(D, \mathbb{R})$)

(2) Sei $x_0 \in D$ und $f_j$ sei partiell differenzierbar in $x_0$, es existiert also

$$(\operatorname{grad} f_j)(x_0) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x_0)\right) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

Setze dann:

$$\begin{aligned} J_f(x_0) &:= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) := \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x_0) \\ &:= \begin{pmatrix} (\operatorname{grad} f_1)(x_0) \\ \vdots \\ (\operatorname{grad} f_m)(x_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Matrix heißt *Funktional*– oder Jakobi-*Matrix* von $f$ in $x_0$.

Im Fall $m = n$ ist $J_f(x_0)$ quadratisch; die Determinante $\det J_f(x_0)$ heißt dann *Funktional*– oder Jakobi-*Determinante*.

**Definition 22.2.** $f$ heißt in $x_0$ *differenzierbar*, wenn eine $m \times n$–Matrix $A$ existiert mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{\|h\|} = 0 \tag{22-i}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - Ah\|}{\|h\|} = 0$$

**Bemerkung 22.3.**

(1) Im Fall $m = 1$ erhalten wir die alte Definition. Im Fall $n = 1$ auch.

(2) Ist $A$ eine $m \times n$–Matrix, so ist die Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ h & \mapsto & Ah \end{array} \right\}$$

linear und somit stetig. Insbesondere gilt $Ah \to 0$ für $h \to 0$.

**Satz 22.4.** Sei $x_0 \in D$.

(1) Sei $f$ differenzierbar in $x_0$. Dann ist $f$ stetig in $x_0$.

(2) $f$ ist differenzierbar in $x_0 \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \ldots, m\}$ $f_j$ differenzierbar in $x_0$.

In diesem Fall ist die Matrix $A$ in (22-i) eindeutig bestimmt, und es gilt

$$A = J_f(x_0)$$

**Definition 22.5.** Ist $f$ differenzierbar in $x_0$, so heißt die Matrix $A$ in (22-i) (eindeutig!) die (erste) *Ableitung* von $f$ in $x_0$ und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet. Es gilt dann nach dem Satz

$$f'(x_0) = J_f(x_0) \qquad \left(= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\right)$$

**Beweis:**

(1) Wie im Fall $m = 1$. (siehe 21.17 (2))

(2)

„$\Rightarrow$“ Sei $A$ eine $m \times n$–Matrix, für die (22-i) gilt. $A = (a_{jk})$, $\varrho(h) := f(x_0+h) - f(x_0) - Ah$ für $h \in \mathbb{R}^n$.

Dann wegen Differenzierbarkeit:

$$\frac{\varrho(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Sei $\varrho =: (\varrho_1, \ldots, \varrho_m)$; dann gilt

$$\varrho_j(h) := f_j(x_0+h) - f_j(x_0) - \sum_{k=1}^{n} a_{jk} h_k$$

Setze $a_j := (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$ ($j$-te Zeile von $A$).

$$\Rightarrow \ \varrho_j(h) = f_j(x_0+h) - f_j(x_0) - a_j \cdot h$$

und nach Obigem:

$$\frac{\varrho_j(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

$\Rightarrow$ $f_j$ in $x_0$ differenzierbar, und $a_j = (\operatorname{grad} f_j)(x_0)$. Dies gilt für alle $j$; daher

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x_0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(x_0) \end{pmatrix} = J_f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$$

„$\Leftarrow$“ Jedes $f_j$ sei in $x_0$ differenzierbar.

$$\Rightarrow \ \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad r_j(h) := f_j(x_0 + h) - f_j(x_0) - (\operatorname{grad} f_j)(x_0) \cdot h$$

Dann $\forall j$ $\frac{r_j(h)}{\|h\|} \to 0$ für $h \to 0$.

Setze

$$r := (r_1, \dots, r_m), \quad A := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x_0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \cdot h$$

und $\frac{r(h)}{\|h\|} \to 0$ für $h \to 0$

$\Rightarrow$ $f$ differenzierbar in $x_0$, und $f'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$

□

**Korollar 22.6.** Existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ auf $D$ und sind *stetig*, so ist $f$ auf $D$ differenzierbar.

**Beweis:** 21.17 $\Rightarrow$ alle $f_j$ differenzierbar auf $D$. 22.4 $\Rightarrow$ $f$ differenzierbar auf $D$. □

**Beispiel 22.7.**

(1)

$$f(x,y) := (\underbrace{x^2 + y^2}_{f_1(x,y)}, \underbrace{e^{x+y}}_{f_2(x,y)}, \underbrace{xy}_{f_3(x,y)})$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig auf $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ $f$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$, und

$$f'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial(x,y)} = J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ e^{x+y} & e^{x+y} \\ y & x \end{pmatrix}$$

(2) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *linear*, also $f(x) = Ax$ mit einer $m \times n$-Matrix $A$.

Dann gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $h \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah = A(x_0 + h) - A(x_0) - Ah = 0$$

Insbesondere

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{\|h\|} = 0 \xrightarrow{h \to 0} 0$$

$\Rightarrow$ $f$ differenzierbar in $x_0$, und $f'(x_0) = A$.

**Satz 22.8** (Kettenregel)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $E \subset \mathbb{R}^m$ offen. $f : D \to \mathbb{R}^m$ sei differenzierbar in $x_0 \in D$. Ferner gelte $f(D) \subset E$. $g : E \to \mathbb{R}^p$ sei differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$.

Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar in $x_0$, und

$$\big(g \circ f\big)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} B &:= g'(y_0) = g'\big(f(x_0)\big) \quad && (p \times m\text{-Matrix}) \\ A &:= f'(x_0) && (m \times n\text{-Matrix}) \\ h &:= g \circ f : D \to \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

$$\varrho(x) := \frac{h(x) - h(x_0) - BA(x - x_0)}{\|x - x_0\|}$$

(zeigen: $\varrho(x) \to 0$ für $x \to x_0$).

Dann führe Hilfsfunktion ein:

$$\tilde{g}(y) := \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0) - B(y - y_0)}{\|y - y_0\|} & \text{für } y \neq y_0 \\ 0 & \text{für } y = y_0 \end{cases}$$

Dann, da $g$ differenzierbar in $y_0$ und $g'(y_0) = B$, ist $\tilde{g}$ stetig in $y_0$.

Ferner $f$ stetig in $x_0$.

$\Rightarrow$ $\tilde{g} \circ f$ stetig in $x_0$

$\Rightarrow$ $\tilde{g}(f(x)) \to \tilde{g}(f(x_0)) = \tilde{g}(y_0) = 0$ für $x \to x_0$.

Daher

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big) \\ &= B\big(f(x) - f(x_0)\big) - \big\|f(x) - f(x_0)\big\| \cdot \tilde{g}\big(f(x)\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ \varrho(x) &= \frac{B(f(x) - f(x_0)) + \|f(x) - f(x_0)\| \cdot \tilde{g}(f(x)) - BA(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \\ &= B \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|}}_{\xrightarrow{x \to x_0} 0} + \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} \cdot \underbrace{\tilde{g}(f(x))}_{\xrightarrow{x \to x_0} 0} \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen: $\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|}$ beschränkt für $x$ in einer $\delta$-Umgebung von $x_0$.

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} &= \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) + A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\ &\le \underbrace{\frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{\xrightarrow{x \to x_0} 0} + \underbrace{\frac{\|A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{\le \|A\|} \end{aligned}$$

□

*Wichtiger Spezialfall:* $p = 1$, d.h. $g$ reellwertig.

Unter den Voraussetzungen des Satzes 22.8 gilt dann

$$\underbrace{(g \circ f)'(x_0)}_{=\mathrm{grad}(g\circ f)(x_0)} = g'\big((f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}\big(g \circ f\big)(x_0) &= \frac{\partial g}{\partial y_1}\big(f(x_0)\big)\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}\big(f(x_0)\big) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) \\
&\quad + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_m}\big(f(x_0)\big) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) \\
&\;\vdots \\
\frac{\partial}{\partial x_n}\big(g \circ f\big)(x_0) &= \frac{\partial g}{\partial y_1}\big(f(x_0)\big)\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}\big(f(x_0)\big) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\
&\quad + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_m}\big(f(x_0)\big) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0)
\end{aligned}$$

## 22.2. Implizit definierte Funktionen

*Motivation:* Sei $f(x, y)$ Funktion von 2 Variablen, $f$ reellwertig.

Untersuchungsgegenstand: Gleichung $f(x, y) = 0$

*Frage:* Kann man die Gleichung $f(x, y) = 0 \ldots$

- *nach $y$ auflösen* ($\rightsquigarrow y = y(x)$)
- *eindeutig* auflösen
- *„lokal“ eindeutig* auflösen

**Beispiel 22.9.**

(1) $f(x, y) = 2x^2 + 3y$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$

$$f(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = -\tfrac{2}{3}x^2$$

$\Rightarrow$ eindeutig nach $y$ auflösbar (vgl. Abb. 22.1)

(2) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$

$\Rightarrow$ $f(x, y) = 0$ hat keine Lösung.

(3) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$

$$f(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y^2 = x^2 + 1 \;\Leftrightarrow\; y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$$

auflösbar nach $y$, *nicht* eindeutig, wohl aber „lokal“ eindeutig. (vgl. Abb. 22.2)

(4) $f(x, y) = x^2 - y^2$

$$f(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \pm x$$

in $(0, 0)$ nicht „lokal“ eindeutig auflösbar. (vgl. Abb. 22.3)

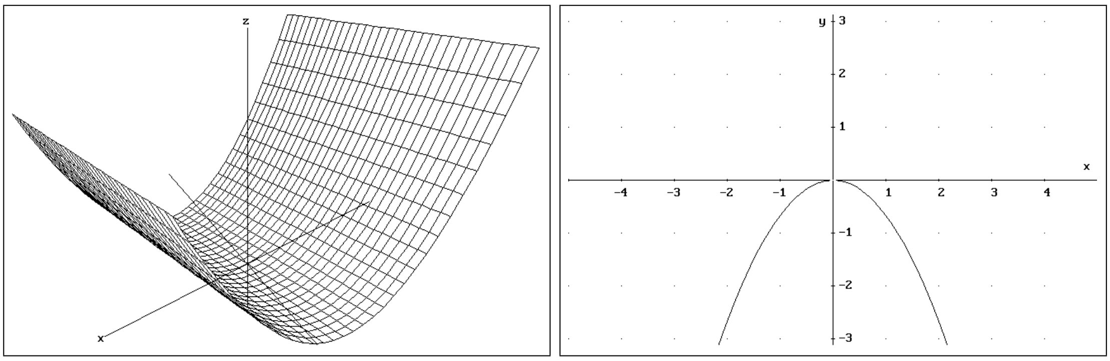



Abbildung 22.1.: $f(x, y) = 2x^2 + 3y$, $y = -\frac{2}{3}x^2$

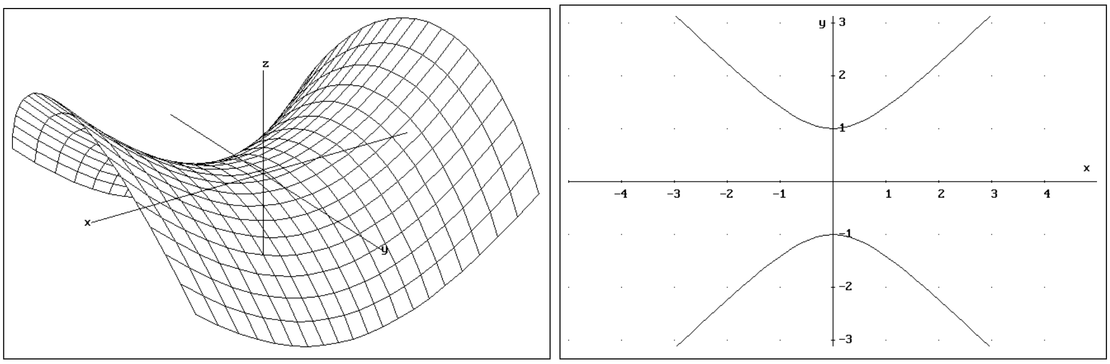



Abbildung 22.2.: $f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$, $y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$

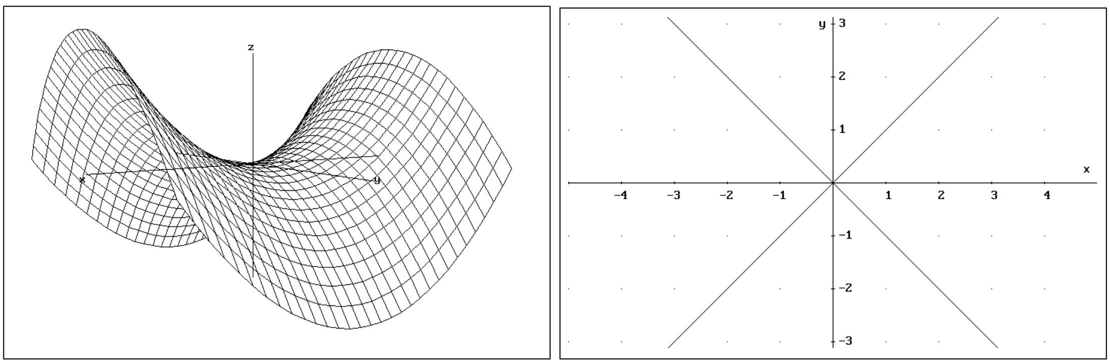



Abbildung 22.3.: $f(x, y) = x^2 - y^2$, $y = \pm x$ (nicht „lokal“ eindeutig auflösbar in $(0, 0)$)

Im folgenden sei $D \subset \mathbb{R}^{n+p}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^p$ *stetig differenzierbar*.

*Frage:* Kann die Gleichung $f(x, y) = 0$ (mit $(x, y) \in D$, wobei $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$) nach $y$ aufgelöst werden?

*Bezeichnungen:* für $(x, y) \in D$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_p)$ (also $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial(x,y)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} & \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{pmatrix} \\ &=: \left( \frac{\partial f}{\partial x} \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Also

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{pmatrix}$$

Sei nun $(x_0, y_0) \in D$ mit $f(x_0, y_0) = 0$.

*Frage:* Gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $x_0$ und eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^p$ von $y_0$ und eine Funktion $g : U \to V$ mit $g(x_0) = y_0$ und $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$?

(Man sagt dann: Durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ ist implizit die Funktion $y = g(x)$ definiert)

**Satz 22.10** (Satz über implizit definierte Funktionen)**.** $D \subset \mathbb{R}^{n+p}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar auf $D$. Es sei $(x_0, y_0) \in D$ mit $f(x_0, y_0) = 0$. Es gelte:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ sei } \textit{invertierbar}$$

Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $x_0$, eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^p$ von $y_0$ mit $U \times V \subset D$ und genau eine Funktion $g : U \to V$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $g(x_0) = y_0$, $\forall x \in U \; f(x, g(x)) = 0$

(2) $\forall_{\substack{x \in U \\ y \in V}} \quad \big[ f(x, y) = 0 \;\Rightarrow\; y = g(x) \big]$

Weiter gilt für dieses $g$:

(3) $g$ ist auf $U$ stetig differenzierbar, und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$ ist invertierbar für alle $x \in U$ und es gilt

$$\forall x \in U \quad g'(x) = -\left( \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, g(x)\big) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, g(x)\big)$$

(siehe auch Abb. 22.4)

(ohne Beweis)

Dabei (Nachtrag):

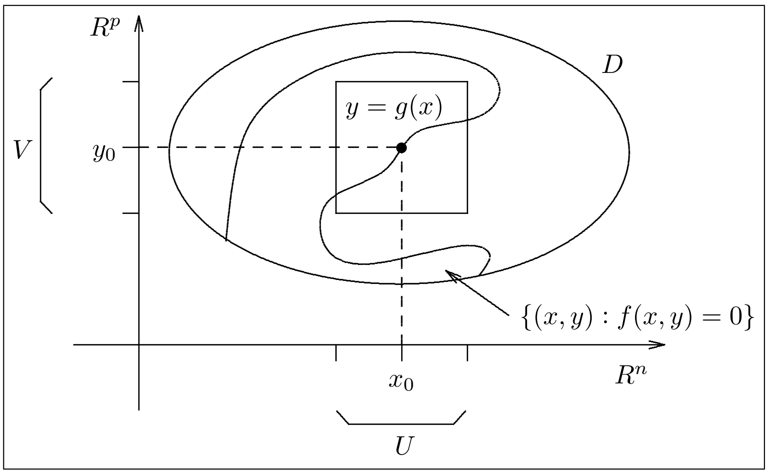



Abbildung 22.4.: Lokale Eindeutigkeit und Invertierbarkeit

**Definition 22.11.** $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Umgebung* von $x_0 \in \mathbb{R}^n$, wenn $x_0$ innerer Punkt von $U$ ist.

$$\Leftrightarrow \; \exists \delta > 0 \quad U_\delta(x_0) \subset U$$

**Beispiel 22.12.**

(1) $D = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{1+1}$ (d.h. $n = p = 1$), $f(x,y) := x^2 - y^2 + 1$

Dann: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$. (vgl. Abb. 22.2)

$(x_0, y_0) := (0,1)$; dann $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -2 \neq 0$, d.h. die $1 \times 1$–Matrix $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ ist invertierbar.

22.10 $\Rightarrow$ Es existieren Umgebungen $U$ von $x_0 = 0$ und $V$ von $y_0 = 1$ und $g : U \to V$ mit

$$f\big(x, g(x)\big) = 0 \; \text{ für alle } \; x \in U$$

(In diesem Beispiel sehen wir, dass etwa $U := \mathbb{R}$, $V := (0, \infty)$ gewählt werden kann; der Satz gibt dies *nicht* her.)

Nach (3) gilt ferner:

$$g'(x) = -\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, g(x)\big)\right)^{-1}}_{=-2g(x)} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, g(x)\big)}_{=2x} = \frac{x}{g(x)}$$

In diesem Beispiel wissen wir (aber nicht aus dem Satz):

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{g(x)} \text{ wie vom Satz behauptet}$$

(2) $D = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{1+1}$ (d.h. $n = p = 1$), $f(x,y) := y + xy^2 - e^{xy}$

Nun ist keine *geschlossene* formelmäßige Auflösung von $f(x,y) = 0$ nach $y$ möglich.

Etwa $(x_0, y_0) := (0, 1)$, also $f(x_0, y_0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 - ye^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 + 2xy - xe^{xy}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1 \neq 0$$

22.10 $\Rightarrow$ Es gibt Umgebungen $U$ von $x_0 = 0$ und $V$ von $y_0 = 1$ und genau ein $g : U \to V$ mit

$$\forall x \in U \quad f\big(x, g(x)\big) = 0 \ \text{ und } \ g(0) = 1$$

und ...

Also:

$$\forall x \in U \quad g(x) + xg(x)^2 - e^{xg(x)} = 0$$

Ferner

$$\begin{aligned}\forall x \in U \quad g'(x) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \\ &= \frac{g(x)e^{xg(x)} - g(x)^2}{1 + 2xg(x) - xe^{xg(x)}}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Insbesondere $g'(0) = 1$

**Satz 22.13** (lokaler Umkehrsatz)**.** $D \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar, $x_0 \in D$. $f'(x_0)$ sei invertierbar.

Dann existiert eine offene Umgebung $U(x_0)$ mit:

(1) $f(U)$ ist offen.

(2) $f\big|_U$ ist injektiv, $\forall x \in U$ $f'(x)$ invertierbar

(3) $\big(f\big|_U\big)^{-1} : f(U) \to U$ ist stetig differenzierbar, und

$$\Big(\big(f\big|_U\big)^{-1}\Big)'(y) = \Big[f'\Big(\big(f\big|_U\big)^{-1}(y)\Big)\Big]^{-1} \quad \text{für alle } \ y \in f(U)$$

**Beweis:** Setze $F(y,x) := y - f(x) \quad \forall (x,y) \in D \times \mathbb{R}^n$ (vertauschte Rollen von $x$ und $y$)

Will die Gleichung $F(y,x) = 0$ lokal eindeutig *nach* $x$ auflösen.

Mit $y_0 := f(x_0)$ gilt in der Tat $F(y_0, x_0) = 0$; ferner

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = -f'(x_0) \ \text{ invertierbar}$$

Nach 22.10: Es gibt Umgebungen $V$ von $y_0$ und $U'$ von $x_0$ und genau ein $g : V \to U'$ mit

$$\forall y \in V \quad F\big(y, g(y)\big) = 0 \ \text{ sowie } \ g(y_0) = x_0 \ \text{ und } \ldots$$

$$\Rightarrow \ \forall y \in V \quad f\big(g(y)\big) = y \quad \Rightarrow \quad g = \big(f\big|_{U'}\big)^{-1}$$

Ferner nach 22.10

$$\forall y \in V \quad g'(y) = -\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(y, g(y))\right)^{-1}}_{=-f'(g(y))} \cdot \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(y, g(y))}_{=I}$$

$$= \left[f'\left(\left(f\big|_{U'}\right)^{-1}(y)\right)\right]^{-1}$$

Schließlich $U := g(V) \subset U'$, dann $f(U) = V$ *offen.*

Ferner

$$U = \underbrace{\left(f\big|_{U'}\right)^{-1}}_{\text{stetig}} \underbrace{(V)}_{\text{offen}} \quad \text{offen}$$

$\square$

**Definition 22.14.** $f$ *lokal injektiv* auf $D$

$$:\Leftrightarrow \ \forall x \in D \ \exists U \subset D \text{ Umgebung von } x \ : \quad f\big|_U \text{ injektiv}$$

**Beispiel 22.15.**

(1) $D := \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := (x \cos y,\ x \sin y)$

$$\Rightarrow \ f'(x, y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \det f'(x, y) = x$$

Etwa für $(x_0, y_0) := \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt $\det f'(x_0, y_0) = 1 \neq 0 \ \Rightarrow \ f'(x_0, y_0)$ invertierbar.

22.13 $\Rightarrow$ Es existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(1, \frac{\pi}{2})$ mit

$f : U \to f(U)$ bijektiv, $\quad f(U)$ offen,

$\left(f\big|_U\right)^{-1} : f(U) \to U$ stetig differenzierbar,

$$\left(\left(f\big|_U\right)^{-1}\right)'(y) = \left[f'\underbrace{\left(\left(f\big|_U\right)^{-1}(y)\right)}_{=\left(1, \frac{\pi}{2}\right)}\right]^{-1} \text{ für } y \in f(U)$$

Insbesondere:

$$\left(\left(f\big|_U\right)^{-1}\right)'\underbrace{\left(f\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right)\right)}_{=(0,1)} = \left[f'\left(\left(f\big|_U\right)^{-1}\left(f\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right)\right)\right)\right]^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $D = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$

$$\Rightarrow \ f'(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \det f'(x, y) = e^x \neq 0 \ \text{ für } \textit{alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

22.13 $\Rightarrow$ $f$ ist auf $\mathbb{R}^2$ lokal injektiv.

*Aber:* $f$ ist *nicht* injektiv, denn etwa

$f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$ für alle $(x, y) \subset \mathbb{R}^2$

**Korollar 22.16.** $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, es gelte $\forall x \in D\ f'(x)$ invertierbar. (22.13 $\Rightarrow f$ lokal injektiv)

Dann: $f(D) \subset \mathbb{R}^n$ *offen.*

Beweis selbst.

## 22.3. Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

**Beispiel 22.17.** Gesucht ist dasjenige Rechteck, das unter allen Rechtecken mit Umfang 4 den größten Flächeninhalt hat. Es ist also die Funktion

$$f(x, y) = x \cdot y \quad \text{(Flächeninhalt)}$$

zu *maximieren* unter der *Nebenbedingung*

$$h(x, y) := 2(x + y) = 4$$

[Lösung: $h(x, y) = 4 \ \Rightarrow\ y = 2 - x$; also ist $f(x, y) = x(2 - x)$ zu maximieren *ohne* Nebenbedingung. $\Rightarrow\ x = 1 \ \Rightarrow\ y = 2 - x = 1 \implies$ Quadrat]

**Definition 22.18.**

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in \mathbb{N}$, $p < n$. $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $h \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$, $T := \{x \in D : \ h(x) = 0\}$

Wir sagen, dass $f$ in $x_0 \in D$ ein *lokales* $\left|\begin{array}{c} \textit{Maximum} \\ \textit{Minimum} \end{array}\right|$ *unter der Nebenbedingung* $h = 0$ hat, wenn $x_0 \in T$ und

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap T \qquad \left|\begin{array}{c} f(x) \le f(x_0) \\ f(x) \ge f(x_0) \end{array}\right|$$

**Satz 22.19** (Lagrangesche Multiplikatorenregel)**.** *$D, f, p, h, T$ seien wie in obiger Definition. Es sei ferner $h =: (h_1, \ldots, h_p)$.*

Falls $f$ in $x_0 \in D$ ein lokales Maximum oder Minimum unter der Nebenbedingung $h = 0$ hat *und* falls

$$\operatorname{rg} \underbrace{h'(x_0)}_{p \times n} = p,$$

so gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ (Lagrange–Multiplikatoren) mit

$$(\operatorname{grad} f)(x_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot (\operatorname{grad} h_i)(x_0) \qquad \Big(= (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \cdot h'(x_0)\Big)$$

(ohne Beweis)

In obiger Gleichung haben wir $n$ (skalare) Gleichungen; *dazu:* $p$ (skalare) Gleichungen

$$h_1(x_0) = h_2(x_0) = \cdots = h_p(x_0) = 0$$

$\Rightarrow\ n+p$ Gleichungen für $n+p$ Unbekannte $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

**Beispiel 22.20.** $(n = 3,\ p = 2)$, $D = \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) := x + y + z$$

Nebenbedingung:

$$h(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ x + z - 1 \end{pmatrix}$$

d.h. $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1\}$.

*Aufgabe:* Bestimme max und min von $f$ auf der Menge $T$, d.h. unter der Nebenbedingung $h = 0$.

Für $(x,y,z) \in T$ gilt $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, & \text{also } |x|, |y| \le \sqrt{2} \\ x + z = 1, & \text{also } |z| - |1 - x| \le 1 + \sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $T$ ist *beschränkt*, $T$ ist *abgeschlossen* $\Rightarrow$ $T$ ist *kompakt*.

Nach 19.9 existieren also $a, b \in D$ mit

$$f(a) = \max f(T), \qquad f(b) = \min f(T)$$

*d.h.:* $f$ hat in $\left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right|$ ein (lokales) $\left| \begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix} \right|$ unter der Nebenbedingung $h = 0$.

$$h'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $(x,y,z) \in T$ gilt insbesondere $x^2 + y^2 = 2$, also $(x,y) \neq (0,0)$.

$\Rightarrow$ $\operatorname{rg} h'(x,y,z) = 2 = p$.

Außerdem $\operatorname{grad} f(x,y,z) = (1,1,1)$.

22.19 $\Rightarrow$ $(1,1,1) = \lambda_1(2x, 2y, 0) + \lambda_2(1,0,1)$ für $(x,y,z) = a$ oder $(x,y,z) = b$. Also:

(1) $1 = 2\lambda_1 x + \lambda_2$

(2) $1 = 2\lambda_1 y$

(3) $\boxed{1 = \lambda_2}$

(4) $x^2 + y^2 = 2$

(5) $x + z = 1$.

(1),(3) $\Rightarrow$ $2\lambda_1 x = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = 0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{z = 1}$.

$\Rightarrow$ $\boxed{y = \pm\sqrt{2}}$ $\qquad \left(\boxed{\lambda_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)$

D.h. 22.19 liefert

$$a, b \in \{(0, \sqrt{2}, 1),\ (0, -\sqrt{2}, 1)\}$$

$$f(0, \pm\sqrt{2}, 1) = \pm\sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow \left| \begin{matrix} \max f(T) = f(a) = \sqrt{2} + 1,\ a = (0, \sqrt{2}, 1) \\ \min f(T) = f(b) = -\sqrt{2} + 1,\ b = (0, -\sqrt{2}, 1) \end{matrix} \right|$$

# 23. Integration im $\mathbb{R}^n$

## 23.1. Das RIEMANN–Integral

Sind $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle ($a_j \leq b_j$ für $j = 1, \dots, n$), so heißt

$$I := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

ein *kompaktes Intervall* oder *kompakter Quader* im $\mathbb{R}^n$. (vgl. Abb. 23.1)

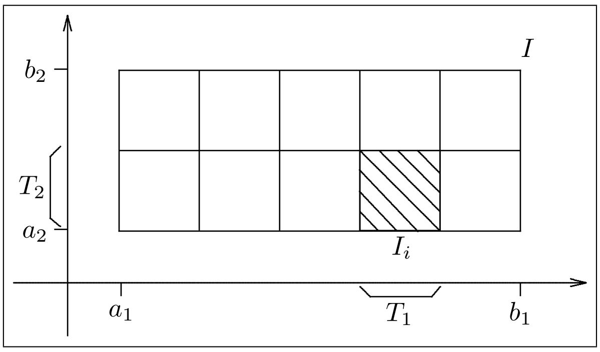



Abbildung 23.1.: kompakter Quader und Teilintervall

$$|I| := (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

heißt *Inhalt* von $I$.

Sei $I$ wie oben und für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ sei $Z_j$ eine Zerlegung von $[a_j, b_j]$.

Dann heißt

$$Z := Z_1 \times Z_2 \times \cdots \times Z_n$$

eine *Zerlegung von $I$*.

Ein zu $Z$ gehörendes *Teilintervall* von $I$ hat die Form $T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n$, wobei für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ $T_j$ ein zu der Zerlegung $Z_j$ gehörendes Teilintervall von $[a_j, b_j]$ ist.

Sind nun $I_1, \dots, I_m$ sämtliche zu $Z$ gehörenden Teilintervalle von $I$, so gilt:

$$I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_m = I$$

und $|I| = \sum\limits_{k=1}^{m} |I_k|$.

**Definition 23.1.** Sei $I$ wie oben und $f : I \to \mathbb{R}$ *beschränkt.* $Z$ sei eine Zerlegung von $I$ und $I_1, \dots, I_m$ seien die zu $Z$ gehörenden Teilintervalle von $I$.

Setze $\forall k \in \{1, \dots, m\} \quad m_k := \inf f(I_k), \quad M_k := \sup f(I_k) \quad$ (existieren, da $f$ beschränkt)

Definiere

$$s_f(Z) := \sum_{k=1}^{m} m_k \cdot |I_k| \qquad \textit{Untersumme}$$

$$S_f(Z) := \sum_{k=1}^{m} M_k \cdot |I_k| \qquad \textit{Obersumme}$$

Ist $\tilde{Z}$ eine weitere Zerlegung von $I$, so heißt $\tilde{Z}$ *Verfeinerung* von $Z$, wenn $\tilde{Z} \supset Z$.

Wie im eindimensionalen Fall (vgl. 10.3) zeigt man:

**Satz 23.2.** $I, f$ wie oben. $Z$ und $\tilde{Z}$ seien Zerlegungen von $I$. Dann gilt

(1) Falls $\tilde{Z}$ Verfeinerung von $Z$, dann

$$s_f(Z) \leq s_f(\tilde{Z}), \qquad S_f(Z) \geq S_f(\tilde{Z})$$

(vgl. Abb. 23.2)

(2) $s_f(Z) \leq S_f(\tilde{Z})$

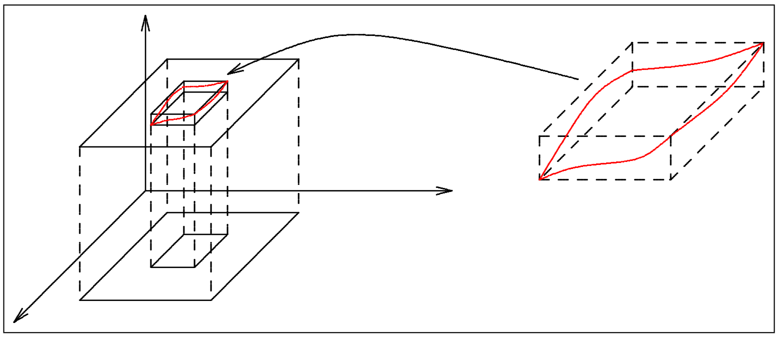


Abbildung 23.2.: Ober– und Untersummen im $\mathbb{R}^n$

Aus 23.2 folgt

$$s_f := \sup \{s_f(Z) : \ Z \text{ Zerlegung von } I\} \leq S_f(\tilde{Z}) \ \text{ für jede Zerlegung } \tilde{Z} \text{ von } I$$

$$\Rightarrow \ s_f \leq S_f := \inf \left\{S_f(\tilde{Z}) : \ \tilde{Z} \text{ Zerlegung von } I\right\}$$

$$\left|\begin{matrix} s_f \\ S_f \end{matrix}\right| \text{heißt} \left|\begin{matrix} \text{unteres} \\ \text{oberes} \end{matrix}\right| (\text{Riemann–})\ \textit{Integral} \text{ von } f \text{ über } I.$$

$$s_f =: \underline{\int}_I f(x)\, dx, \qquad S_f =: \overline{\int}_I f(x)\, dx$$

**Definition 23.3.** $I \subset \mathbb{R}^n$ kompaktes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt.

$f$ heißt (RIEMANN–) *integrierbar über $I$*, wenn

$$\underline{\int}_I f(x)\,dx = \overline{\int}_I f(x)\,dx$$

In diesem Fall heißt

$$\int_I f(x)\,dx := \underline{\int}_I f(x)\,dx = \overline{\int}_I f(x)\,dx$$

das (RIEMANN–) *Integral von $f$ über $I$*.

Wie im eindimensionalen Fall zeigt man:

**Lemma 23.4.** $I \subset \mathbb{R}^n$ kompaktes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt.

(1) Gilt $A \le f \le B$ auf $I$ mit $A, B \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$A \cdot |I| \le \underline{\int}_I f(x)\,dx \le \overline{\int}_I f(x)\,dx \le B \cdot |I|.$$

(2) Ist $Z$ eine Zerlegung von $I$ und sind $I_1, \ldots, I_m$ die zu $Z$ gehörigen Teilintervalle von $I$, so gilt

$$\underline{\int}_I f(x)\,dx = \sum_{j=1}^m \underline{\int}_{I_j} f(x)\,dx$$

$$\overline{\int}_I f(x)\,dx = \sum_{j=1}^m \overline{\int}_{I_j} f(x)\,dx$$

Weiter wie im Eindimensionalen (vgl. 10.5):

**Definition 23.5.**

$$R(I) := \{f : I \to \mathbb{R} : \ f \text{ ist RIEMANN-integrierbar über } I\}$$

**Satz 23.6.** Seien $f, g \in R(I)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(1)

$$\int_I \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int_I f(x)\,dx + \beta \int_I g(x)\,dx$$

(d.h. insbesondere gilt $\alpha f + \beta g \in R(I)$). Also ist $R(I)$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, und $\int_I : R(I) \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.

(2) Falls $\forall x \in I\ f(x) \le g(x)$, so gilt:

$$\int_I f(x)\,dx \le \int_I g(x)\,dx$$

(3)

$$\left|\int\limits_I f(x)\right| \leq \Big(\sup\{f(x):\ x \in I\}\Big) \cdot |I|$$

(4) Ist $I = I_1 \cup I_2$, wobei $I_1, I_2$ kompakte Intervalle mit $|I_1 \cap I_2| = 0$ ($I_1 \cap I_2$ *ist* kompaktes Intervall), so gilt $f\big|_{I_1} \in R(I_1)$, $f\big|_{I_2} \in R(I_2)$, und

$$\int\limits_I = f(x)\ dx = \int\limits_{I_1} \Big(f\big|_{I_1}\Big)(x)\ dx + \int\limits_{I_2} \Big(f\big|_{I_2}\Big)(x)\ dx = \int\limits_{I_1} f(x)\ dx + \int\limits_{I_2} f(x)\ dx$$

(5) RIEMANN*sches Kriterium*: Sei $h : I \to \mathbb{R}$ beschränkt

$$h \in R(I) \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists Z \text{ Zerlegung von } I \quad S_h(Z) - s_h(Z) < \varepsilon$$

(6) Ist $f$ konstant, so gilt (mit $c := f(x)$ für alle $x \in I$)

$$\int\limits_I f(x)\ dx = c \cdot |I|$$

(ohne Beweis)

**Satz 23.7.**

(1) $C(I, \mathbb{R}) \subset R(I)$

(2) Sind $f, g \in R(I)$, so gilt $f \cdot g \in R(I)$, $|f| \in R(I)$, und

$$\left|\int\limits_I f(x)\ dx\right| \leq \int\limits_I |f(x)|\ dx$$

(Dreiecksungleichung für Integrale)

(3) Sind $f, g \in R(I)$ und gilt $\forall x \in I\ |g(x)| \geq \alpha$ für ein $\alpha > 0$, so gilt

$$\frac{f}{g} \in R(I)$$

(ohne Beweis)

**Satz 23.8** (Satz von FUBINI)**.** Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $p + q = n$, also $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Sei $I_1$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}^p$, $I_2$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}^q$, also ist $I := I_1 \times I_2$ ein kompaktes Intervall im $\mathbb{R}^n$.

Sei $f \in R(I)$. Für Punkte in $I$ schreiben wir $(x, y)$ mit $x \in I_1,\ y \in I_2$.

Für jedes $\left|\begin{array}{c} y \in I_2 \\ x \in I_1 \end{array}\right|$ existiere $\left|\begin{array}{c} \int_{I_1} f(x,y)\ dx =: g(y) \\ \int_{I_2} f(x,y)\ dy =: h(x) \end{array}\right|$

*Behauptung:*

$$\left|\begin{array}{l} g \in R(I_2) \\ h \in R(I_1) \end{array}\right|, \text{ und}$$

$$\int\limits_I f(x,y)\, d(x,y) = \left|\begin{array}{l} \int_{I_2} g(y)\, dy = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x,y)\, dx\right)\, dy \\ \int_{I_1} h(x)\, dx = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x,y)\, dy\right)\, dx \end{array}\right|$$

**Beweis:** Sei $Z$ Zerlegung von $I = I_1 \times I_2$, also $Z = \tilde{Z} \times \hat{Z}$ mit: $\left|\begin{array}{l} \tilde{Z} \text{ Zerlegung von } I_1 \\ \hat{Z} \text{ Zerlegung von } I_2 \end{array}\right|$

Die Teilintervalle von $\left|\begin{array}{l} I_1 \\ I_2 \end{array}\right|$, die zu $\left|\begin{array}{l} \tilde{Z} \\ \hat{Z} \end{array}\right|$ gehören, werden mit $\left|\begin{array}{l} R_1, \dots, R_m \\ K_1, \dots, K_l \end{array}\right|$ bezeichnet.

$\Rightarrow Z$ hat die Teilintervalle $R_j \times K_i$ $(j = 1, \dots, m;\ i = 1, \dots, l)$

Es gilt $|R_j \times K_i| = |R_j| \cdot |K_i|$.

Setze $m_{ji} := \inf f(R_j \times K_i)$

$$\begin{aligned} s_f(Z) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} m_{ji} \underbrace{|R_j \times R_i|}_{=|R_j|\cdot|K_i|} \\ &= \sum_{i=1}^{l} |K_i| \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{m} m_{ji} \cdot |R_j|}_{=:c_i} = \sum_{i=1}^{l} c_i |K_i| \end{aligned}$$

Sei $i \in \{1, \dots, l\}$ fest und $y_0 \in K_i$

$$\Rightarrow\ m_{ji} \leq f(x, y_0) \text{ für alle } x \in R_j$$

$$\Rightarrow\ m_{ji}|R_j| \underset{23.6\ (6)}{=} \int\limits_{R_j} m_{ji}\, dx \underset{23.6\ (2)}{\leq} \int\limits_{R_j} f(x, y_0)\, dx$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{\sum_{j=1}^{m} m_{ji}|R_j|}_{=c_i} \leq \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{R_j} f(x, y_0)\, dx \underset{\substack{23.6\\(4)}}{=} \int\limits_{I_1} f(x, y_0)\, dx = g(y_0)$$

Also $c_i \leq g(y)$ für alle $y \in K_i$, $i = 1, \dots, l$.

$$\Rightarrow\ c_i|K_i| \underset{\substack{23.6\\(6)}}{=} \int\limits_{K_i} c_i\, dy \underset{23.4}{\leq} \underline{\int\limits_{K_i}} g(y)\, dy$$

$$\underset{\substack{\text{Summe}\\ \text{über } I}}{\Longrightarrow} s_f(Z) = \sum_{i=1}^{l} c_i |K_i| \leq \sum_{i=1}^{l} \underline{\int\limits_{K_i}} g(y)\, dy \underset{23.4}{=} \underline{\int\limits_{I_2}} g(y)\, dy$$

$$\underset{f \in R(I)}{\Longrightarrow} \int\limits_I f(x,y)\, d(x,y) \leq \underline{\int\limits_{I_2}} g(y)\, dy \tag{23-i}$$

Analog zeigt man mittels *Obersummen*:

$$\int\limits_I f(x,y)\ d(x,y) \geq \overline{\int\limits_{I_2}} g(y)\ dy \tag{23-ii}$$

$$\text{(23-i)}, \text{(23-ii)} \ \Rightarrow\ g \in R(I_2), \qquad \int\limits_I f(x,y)\ d(x,y) = \int\limits_{I_2} g(y)\ dy$$

□

Aus 23.8 folgt sofort:

**Satz 23.9.** Ist $f$ stetig auf $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, so gilt:

$$\int\limits_I f(x_1, \dots, x_n)\ dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} \left( \int\limits_{a_2}^{b_2} \left( \cdots \left( \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\ dx_n \right) \cdots \right)\ dx_2 \right) dx_1$$

und die Reihenfolge der Integration darf beliebig vertauscht werden.

**Beispiel 23.10.**

(1) $I := \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\int\limits_I \sin(x+y)\, d(x,y) \underset{23.9}{=} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left( \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\ dy \right)}_{\substack{= \left[-\cos(x+y)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \\ = \cos x - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ = \cos x + \sin x}} \ dx$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)\ dx = \left[\sin x - \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = 2$$

(2) $I := [0,2] \times [0,1] \times [1,2]$

$$\begin{aligned}
\int\limits_I \frac{x^2 z^3}{1+y^2}\, d(x,y,z) &= \int\limits_1^2 \left( \int\limits_0^2 \left( \int\limits_0^1 \frac{x^2 z^3}{1+y^2}\ dy \right) dx \right) dz \\
&= \int\limits_1^2 \left( \int\limits_0^2 \left[x^2 z^3 \arctan y\right]_{y=0}^{y=1}\ dx \right) dz = \int\limits_1^2 \left( \int\limits_0^2 \frac{\pi}{4} x^2 z^3\ dx \right) dz \\
&= \int\limits_1^2 \left[ \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \cdot z^3 \right]_{x=0}^{x=2} dz = \int\limits_1^2 \frac{2\pi}{3} z^3\ dz \\
&= \left[ \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{z^4}{4} \right]_{z=1}^{z=2} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{15}{4} = \frac{5\pi}{2}
\end{aligned}$$

(3) Seien $[a,b],[c,d] \subset \mathbb{R}, I := [a,b] \times [b,c], f \in C[a,b], g \in C[c,d], \varphi(x,y) := f(x)g(y) \quad ((x,y) \in I)$.

$$\int\limits_I \varphi(x,y)\, d(x,y) = \int\limits_a^b \left( \int\limits_c^d f(x)g(y)\, dy \right) dx = \int\limits_a^b \left( f(x) \int\limits_c^d g(y)\, dy \right) dx = \left( \int\limits_a^b f(x)\, dx \right) \left( \int\limits_c^d g(y)\, dy \right)$$

## 23.2. Integration über allgemeineren Mengen

**Definition 23.11.** Sei $B \subset \mathbb{R}^n$, $B \neq \emptyset$, und $f : B \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Setze

$$f_B(x) := \begin{cases} f(x) & x \in B \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus B \end{cases}$$

$$c_B(x) := \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus B \end{cases}$$

$c_B$ heißt *charakteristische Funktion* von $B$.

Sei zusätzlich $B$ beschränkt. Dann existiert ein kompaktes Intervall $I$ mit $B \subset I$ (vgl. Abb. 23.3)

$f$ heißt (RIEMANN–) *integrierbar über* $B$, wenn $f_B\big|_I$ integrierbar über $I$ ist.

In diesem Fall definiere

$$\int\limits_B f(x)\, dx := \int\limits_I \left( f_B\big|_I \right)(x)\, dx \qquad \left( = \int\limits_I f_B(x)\, dx \right)$$

Lt. Saalübung: Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $I \supset B$.

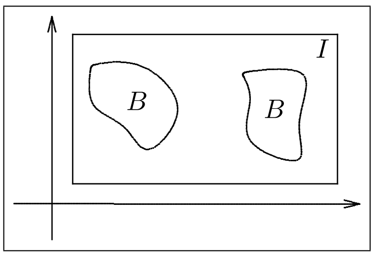



Abbildung 23.3.: Kompaktes Intervall als Obermenge einer allgemeinen Menge

Zur Analyse der Mengen $B$, für welche obige Überlegungen sinnvoll sind:

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$, $B \neq \emptyset$, $B$ beschränkt.

Frage: Kann man $B$ einen *Inhalt* zuordnen?

Wähle dazu ein kompaktes Intervall $I \supset B$. $Z$ sei eine Zerlegung von $I$; die entsprechenden Teilintervalle seien $I_1, \ldots, I_m$. (vgl. Abb. 23.4)

$\sum\limits_{\substack{k=1 \\ I_k \subset B}}^{m} |I_k|$ „innere“ Approximation an den „Inhalt“ von $B$.

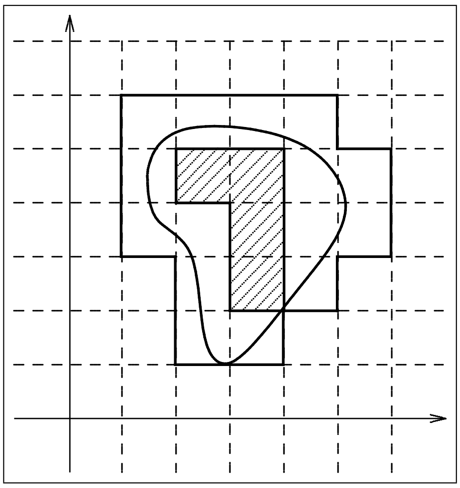


Abbildung 23.4.: äußere und innere Approximation

$\sum\limits_{\substack{k=1 \\ I_k \cap B \neq \emptyset}}^{m} |I_k|$ „äußere“ Approximation an den „Inhalt“ von $B$.

Die „innere“ und „äußere“ Approximationen lassen sich deuten als Unter– bzw. Obersumme der *charakteristischen Funktion* $c_B$ von $B$, denn:

$$\inf c_B(I_k) = \begin{cases} 0, & \text{falls } I_k \not\subset B \\ 1, & \text{falls } I_k \subset B \end{cases}$$

$$\sup c_B(I_k) = \begin{cases} 0, & \text{falls } I_k \cap B = \emptyset \\ 1, & \text{falls } I_k \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; s_{c_B}(Z) = \sum_{\substack{k \\ I_k \subset B}} |I_k|, \qquad S_{c_B} = \sum_{\substack{k \\ I_k \cap B \neq \emptyset}} |I_k|$$

**Definition 23.12.**

$$\underline{\nu}(B) := \sup\{s_{c_B}(Z) : \; Z \text{ Zerlegung von } I\} = \underline{\int_I} c_B(x)\, dx \qquad \textit{innerer Inhalt von } B$$

$$\overline{\nu}(B) := \inf\{S_{c_B}(Z) : \; Z \text{ Zerlegung von } I\} = \overline{\int_I} c_B(x)\, dx \qquad \textit{äußerer Inhalt von } B$$

$B$ heißt (Jordan–) *messbar*, wenn $\underline{\nu}(B) = \overline{\nu}(B)$.

In diesem Fall heißt

$$|B| := \underline{\nu}(B) \; (= \overline{\nu}(B))$$

der *Inhalt* von $B$.

**Bemerkung 23.13.** Ist $B = I$ ein kompaktes Invervall, so stimmt die neue Inhaltsdefinition mit der alten überein.

**Satz 23.14.** $B \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt, $B \neq \emptyset$. Dann gilt:

$B$ ist messbar $\Leftrightarrow c_B \in R(B)$.

In diesem Fall:

$$|B| = \int_B 1\, dx =: \int_B dx$$

**Definition 23.15.**

$$|\emptyset| := 0, \qquad \int_\emptyset f(x)\, dx := 0 \;\text{ für } \textit{jedes } f$$

**Beispiel 23.16.**

(1) Ist $I$ ein kompaktes Intervall, dann ist $I$ messbar und der oben definierte Inhalt stimmt mit dem früher definierten überein.

(2) $(n = 1)$:

$$B := [0,1] \cap \mathbb{Q}, \quad I = [0,1]$$

$$c_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underset{10.6\ (3)}{\Rightarrow} \quad c_B \notin R[0,1] \quad \Rightarrow \quad B \text{ ist nicht messbar}$$

**Definition 23.17.** $B \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt. $B$ heißt *Nullmenge*, wenn $B$ messbar ist und $|B| = 0$.

**Definition 23.18.** Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. $a \in \mathbb{R}^n$ heißt *Randpunkt von A*, wenn

$$\forall \delta > 0 \quad U_\delta(a) \cap A \neq \emptyset \quad \textit{und} \quad U_\delta(a) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$$

$$\partial A := \{a \in \mathbb{R}^n : \; a \text{ ist Randpunkt von } A\}$$

heißt *Rand von A*.

$\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} \; \left(\mathring{A} := \{x \in A : \; x \text{ innerer Punkt von } A\}\right)$

**Beispiel 23.19.**

(1) $(n = 3)$: $B := [0,1] \times [0,1] \times \{0\}$

$B$ ist Nullmenge (im $\mathbb{R}^3$)

(2) $\partial \mathbb{R}^n = \emptyset, \quad \partial \emptyset = \emptyset$

$\partial U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = \varepsilon\} = \partial \overline{U_\varepsilon(x_0)}$

(3) Ergänzendes Beispiel zu 23.10:

Sei $[a,b],[c,d] \subset \mathbb{R}$, $\quad \varphi \in C[a,b]$, $\psi \in C[c,d]$, $\quad f(x,y) := \varphi(x)\psi(y)$, $\quad (x,y) \in I = [a,b] \times [c,d]$

$$\underset{\text{Fubini}}{\Rightarrow} \int\limits_I f(x,y)\, d(x,y) = \int\limits_a^b \left( \int\limits_c^d \varphi(x)\psi(y)\, dy \right) dx$$

$$= \int\limits_a^b \varphi(x) \left( \int\limits_c^d \psi(y)\, dy \right) dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\, dx \cdot \int\limits_c^d \psi(y)\, dy$$

Anwendung:

$$\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} e^{x+y}\, d(x,y) = \int\limits_{[0,1]} e^x\, dx \cdot \int\limits_{[0,1]} e^y\, dy = \left( \int\limits_0^1 e^x\, dx \right)^2 = (e-1)^2$$

**Satz 23.20.** Sei $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

(1) Ist $B$ beschränkt, so gilt:

$$B \text{ ist messbar } \quad \Leftrightarrow \quad \partial B \text{ ist eine Nullmenge}$$

(2) Sind $A, B$ messbar, so sind auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ messbar, und

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ist $A \subset B$, so $|A| \leq |B|$.

(3) Ist $B$ messbar und $f \in C(B, \mathbb{R})$ beschränkt, so gilt $f \in R(B)$.

(4) Ist $B$ messbar und sind $f, g \in R(B)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gilt

(i) $\alpha f + \beta g \in R(B)$ und

$$\int\limits_B (\alpha f + \beta g)(x)\, dx = \alpha \int\limits_B f(x)\, dx + \beta \int\limits_B g(x)\, dx$$

(ii) Aus $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in B$ folgt

$$\int\limits_B f(x)\, dx \leq \int\limits_B g(x)\, dx$$

(iii) $|f|$, $f \cdot g \in R(B)$,

$$\left| \int\limits_B f(x)\, dx \right| \leq \int\limits_B |f(x)|\, dx$$

(iv) Falls $\alpha > 0$ existiert mit $\forall x \in B\ |g(x)| \geq \alpha$, dann ist $\frac{f}{g} \in R(B)$.

(v) Ist $N \subset B$ eine Nullmenge und gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in B \setminus N$, so gilt

$$\int\limits_B f(x)\, dx = \int\limits_B g(x)\, dx$$

(vi) Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$\big(\inf f(B)\big) \cdot |B| \leq \int\limits_B f(x)\, dx \leq (\sup f(B)) \cdot |B|$$

(5) $A, B$ seien messbar. Dann gilt:

(i) Ist $A \subset B$ und $f \in R(B)$, so ist $f\big|_A \in R(A)$.

(ii) Ist $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ beschränkt und gilt

$f\big|_A \in R(A)$ und $f\big|_B \in R(B)$, so gilt $f \in R(A \cup B)$ und $f\big|_{A\cap B} \in R(A \cap B)$, ferner

$$\int\limits_{A\cup B} f(x)\, dx = \int\limits_A f(x)\, dx + \int\limits_B f(x)\, dx - \int\limits_{A\cap B} f(x)\, dx$$

(iii) Sind $A$ und $B$ *nicht überlappend*, d.h.

$$A \cap B \ \subset\ \partial A \cup \partial B$$

und ist $f \in R(A \cup B)$, so gilt

$$\int\limits_{A\cup B} f(x)\, dx = \int\limits_A f(x)\, dx + \int\limits_B f(x)\, dx$$

speziell ($f \equiv 1$): $|A \cup B| = |A| + |B|$.

(6) Ist $B$ eine Nullmenge und $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt, so ist $f \in R(B)$ und

$$\int\limits_B f(x)\, dx = 0$$

(7) Ist $B$ messbar und $f \in R(B)$, so ist der *Graph von f*

$$\big\{\big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ x \in B\big\}$$

eine Nullmenge im $\mathbb{R}^{n+1}$. (vgl. Abb. 23.5)

(8) Ist $B$ messbar, $f \in R(B)$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in B$, so setze

$$M_f := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ x \in B, 0 \leq y \leq f(x)\big\}.$$

Dann gilt: $M_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ messbar. und

$$|M_f| = \int\limits_B f(x)\, dx$$

(vgl. Abb. 23.6)

(9) $B \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f, g \in R(B)$, $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in B$.

$$M_{f,g} := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ x \in B,\ f(x) \leq y \leq g(x)\big\}$$

Dann gilt: $M_{f,g} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ messbar, und

$$|M_{f,g}| = \int\limits_B \big(g(x) - f(x)\big)\, dx$$

(vgl. Abb. 23.6)

(ohne Beweis)

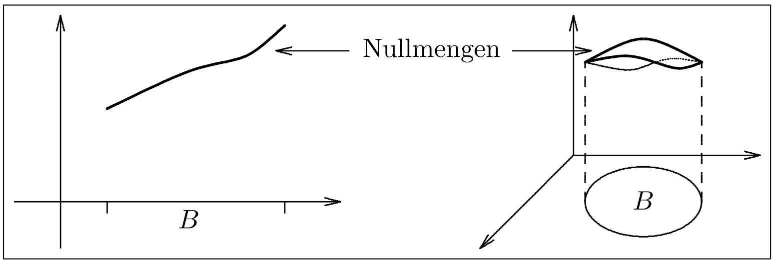



Abbildung 23.5.: Graph einer Funktion; Nullmengen

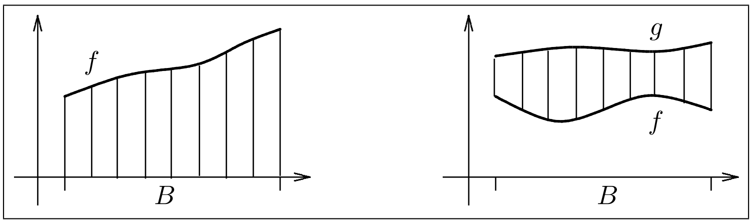



Abbildung 23.6.: Fläche zwischen Graphen bzw. zwischen Graph und Achse

**Beispiel 23.21.** $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$, $r > 0$ fest. (Abb. 23.7)

$g(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$, $f(x) := -\sqrt{r^2 - x^2}$

$\Rightarrow\ K = M_{f,g}$ (mit $B := [-r, r]$)

$$\underset{23.20}{\Rightarrow}\ |K| = \int\limits_B (g - f)(x)\, dx = \int\limits_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4 \cdot \int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

Substitution $x = r \sin\varphi,\ \ dx = r\cos\varphi\, d\varphi$

$$\Rightarrow\ |K| = 4r^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = 4r^2 \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi r^2$$

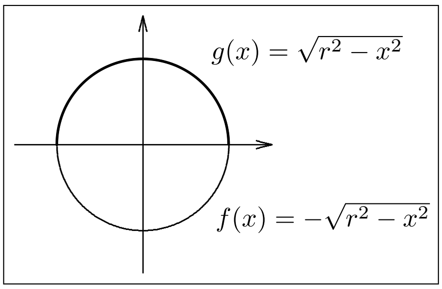



Abbildung 23.7.: Kreis um $(0, 0)$

**Satz 23.22** (Prinzip von CAVALIERI). Sei $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ messbar. Für die Punkte in $B$ schreiben wir $(x, z)$ (mit $x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}$). Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass

$$\forall (x, z) \in B \quad a \leq z \leq b$$

Für jedes $z \in [a, b]$ sei

$$Q(z) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ (x, z) \in B\}$$

messbar im $\mathbb{R}^n$; setze $q(z) := |Q(z)|$.

Dann gilt: $q \in R[a, b]$, und

$$|B| = \int_a^b q(z)\, dz$$

**Beweis:** Setze $I := [a, b]$. Wähle ein kompaktes Intervall $J \subset \mathbb{R}^n$ mit $J \times I \supset B$.

Nach Voraussetzung ($Q(z)$ messbar) gilt:

$$q(z) = |Q(z)| = \int_{Q(z)} 1\, dx = \int_J c_B(x, z)\, dx$$

FUBINI (23.8) $\Rightarrow q \in R[a, b]$, und

$$\underbrace{\int_{J \times I} c_B(x, z)\, d(x, z)}_{=|B|} = \int_I \left( \int_J c_B(x, z)\, dx \right) dz = \int_a^b q(z)\, dz$$

□

**Beispiel 23.23.**

(1) Sei $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$, $r > 0$ fest. (Kugel um $(0, 0, 0)$ mit Radius $r$).

$[a, b] := [-r, r]$. Dann für alle $z \in [-r, r]$:

$$Q(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x, y, z) \in K}_{x^2+y^2 \leq r^2 - z^2}\}$$

Kreis um 0 mit Radius $\sqrt{r^2 - z^2}$. (vgl. Abb. 23.8)

$$\underset{23.21}{\Rightarrow} \ q(z) = |Q(z)| = \pi(r^2 - z^2)$$

$$\underset{23.22}{\Rightarrow} \ |K| = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - z^2)\, dz = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

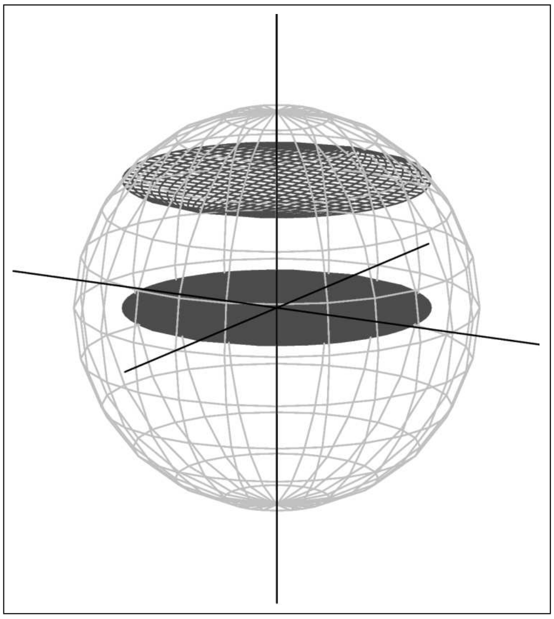


Abbildung 23.8.: Kugel und Schnitt aus Beispiel 23.23 (1)

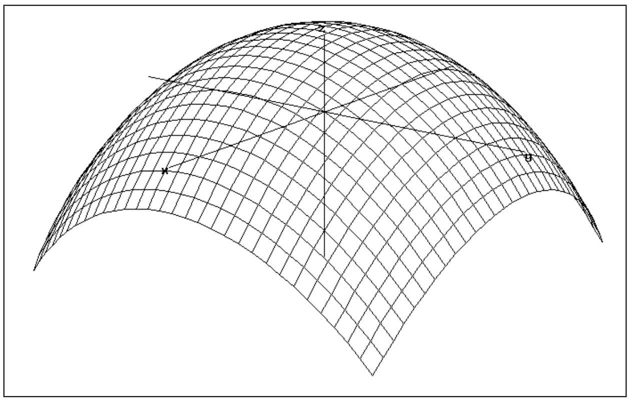


Abbildung 23.9.: Rotationsparaboloid

(2) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z \leq 4,\ z \geq 0\}$. (Rotationsparaboloid, vgl. Abb. 23.9)

Für $z \in [0, 4]:\ Q(z) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4 - z\}$ (Kreis vom Radius $\sqrt{4 - z}$)

$$\Rightarrow\ q(z) = |Q(z)| = \pi(4 - z)$$

$$\Rightarrow\ |B| = \int_0^4 q(z)\ dz = \pi \int_0^4 (4 - z)\ dz = 8\pi$$

(3) *Rotationskörper:* (vgl. Abb. 23.10)

Sei $f \in R[a, b]$, $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b],\ y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$

(Tausche Rollen von $x$ und $z$)

Für $x \in [a, b] : Q(x) = \{(y, z) : y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$ (Kreis mit Radius $f(x)$)

$$\Rightarrow\ q(x) = |Q(x)| = \pi f(x)^2$$

$$\Rightarrow\ \boxed{|B| = \pi \int_a^b f(x)^2\ dx}$$

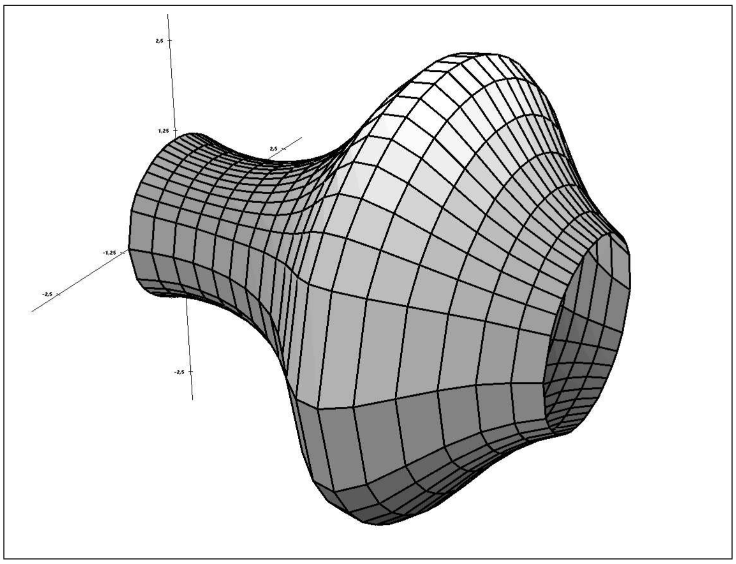


Abbildung 23.10.: Rotationskörper

**Definition 23.24.** $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Normalbereich* bzgl. der $\left|\begin{array}{c} x\text{–Achse} \\ y\text{–Achse} \end{array}\right|$, wenn stetige Funktionen

$$f, g : \left|\begin{array}{c} [a, b] \to \mathbb{R} \\ [c, d] \to \mathbb{R} \end{array}\right|$$

mit

$$\forall \left|\begin{array}{c} x \in [a, b] \\ y \in [c, d] \end{array}\right| : \left|\begin{array}{c} f(x) \leq g(x) \\ f(y) \leq g(y) \end{array}\right|$$

und

$$\left|\begin{array}{l} B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a,b],\ f(x) \leq y \leq g(x)\right\} \\ B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \in [c,d],\ f(y) \leq x \leq g(y)\right\} \end{array}\right| \quad \text{existieren (vgl. Abb. 23.11)}$$

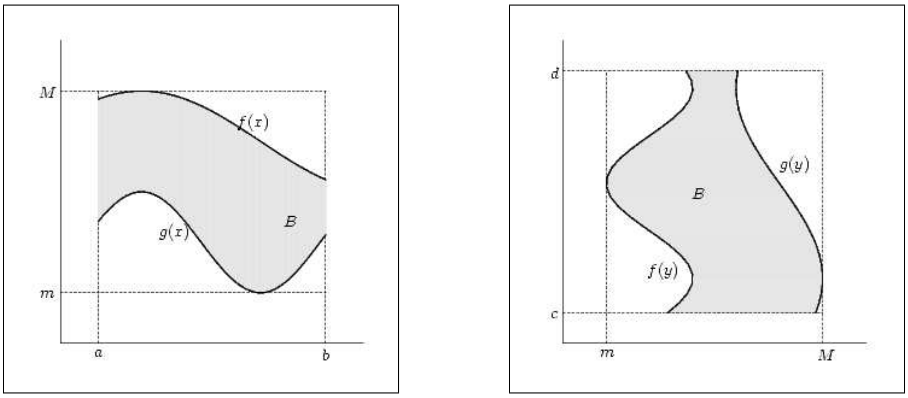



Abbildung 23.11.: Normalbereiche

Ist $B$ ein Normalbereich (bzgl. $x$– oder $y$–Achse), so ist $B$ kompakt und messbar (!); jetzt speziell: Normalbereich bzgl. $x$–Achse.

Sei $h : B \to \mathbb{R}$ stetig. Setze $m := \min f[a,b],\ M := \max g[a,b]$.

$$\Rightarrow\ B \subset I := [a,b] \times [m,M]$$

Sei $x \in [a,b]$ fest. Dann existiert

$$\int\limits_m^M h_B(x,y)\ dy \ \text{ und } \int\limits_m^M h_B(x,y)\ dy = \int\limits_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)\ dy$$

Nach Fubini:

$$\int\limits_B h(x,y)\ d(x,y) = \int\limits_I h_B(x,y)\ d(x,y) = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)\ dy \right) dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int\limits_B h(x,y)\ d(x,y) = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)\ dy \right) dx}$$

Analog für Normalbereich $B$ bzgl. der $y$–Achse

$$\Rightarrow \boxed{\int\limits_B h(x,y)\ d(x,y) = \int\limits_c^d \left( \int\limits_{f(y)}^{g(y)} h(x,y)\ dx \right) dy}$$

**Beispiel 23.25.** $B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0,1],\ \sqrt{x} \le y \le 2-x\right\}$

$$\int\limits_B (x+y)\, d(x,y) = \int\limits_0^1 \left( \int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x} (x+y)\, dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left[ xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=\sqrt{x}}^{y=2-x} dx$$

$$= \int\limits_0^1 \left[ x(2-x) + \frac{1}{2}(2-x)^2 - x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x \right] dx = \cdots = \frac{71}{60}$$

*Verallgemeinerung auf* 3*–dimensionalen Fall:*

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und messbar, $f, g : A \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x,y) \le g(x,y)$ für alle $(x,y) \in A$.

$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 :\ (x,y) \in A,\ f(x,y) \le z \le g(x,y)\}$$

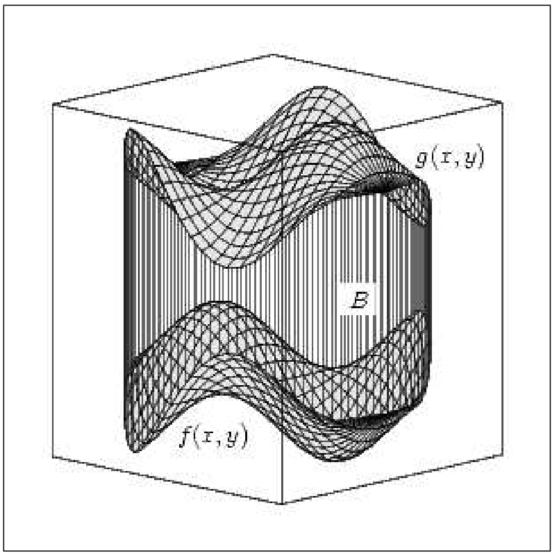



Abbildung 23.12.: Normalbereich im 3-dimensionalen Fall

Mit FUBINI erhält man für stetiges $h : B \to \mathbb{R}$:

$$\boxed{\int\limits_B h(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int\limits_A \left( \int\limits_{f(x,y)}^{g(x,y)} h(x,y,z)\, dz \right) d(x,y)}$$

**Beispiel 23.26.**

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x,y,z \ge 0,\ x+y+z \le 1\}$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x,y \ge 0,\ x+y \le 1\}$

$f \equiv 0,\ g(x,y) := 1-x-y$

$\big(\Rightarrow\ B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in A,\ f(x,y) \le z \le g(x,y)\}\big)$

(1)

$$\begin{aligned}
\int_B 2xyz\ d(x,y,z) &= \int_A \left( \int_0^{1-x-y} 2xyz\ dz \right) d(x,y) \\
&= \int_A \left[xyz^2\right]_{z=0}^{z=1-x-y} d(x,y) = \int_A xy(1-x-y)^2\ d(x,y) \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2\ dy \right) dx = \cdots
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_B (x-y+2z)\ d(x,y,z) &= \int_A \left( \int_0^{1-x-y} (x-y+2z)\ dz \right) d(x,y) \\
&= \int_A \Big[xz+yz+z^2\Big]_{z=0}^{z=1-x-y} d(x,y) \\
&= \int_A \big(x(1-x-y)+y(1-x-y)+(1-x-y)^2\big)\ d(x,y) \\
&= \int_A (1-x-y)\ d(x,y) = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} 1-x-y\ dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \Big[y-xy-\tfrac{1}{2}y^2\Big]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \tfrac{1}{2}-x+\tfrac{1}{2}x^2\ dx \\
&= \Big[\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{6}x^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6}
\end{aligned}$$

## 23.3. Verallgemeinerung der Substitutionsregel

### 23.3.1. Substitutionsregel, Transformationssatz

**Satz 23.27** (Substitutionsregel)**.** $G \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $g \in G \to \mathbb{R}^n$ sei injektiv und stetig differenzierbar; es gelte

$$\det g'(z) \neq 0 \ \text{ für alle } z \in G.$$

$B \subset G$ sei kompakt und messbar und $f : g(B) \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist $g(B)$ kompakt und messbar, und

$$\int_{g(B)} f(x)\ dx = \int_B f\big(g(z)\big) \cdot \big|\det g'(z)\big|\ dz$$

(ohne Beweis)

Anderer Name für die Substitutionsregel: *Transformationssatz.*

### 23.3.2. Anwendungen der Substitutionsregel

**Polarkoordinaten (im Fall $n = 2$)** (vgl. Abb. 23.13)

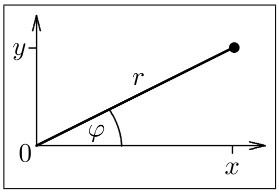



Abbildung 23.13.: Polarkoordinaten–Darstellung

$$r := \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi; \qquad r \in [0, \infty),\ \varphi \in [0, 2\pi)$$

Wähle $g(r, \varphi) := (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$ (vgl. Abb. 23.14),

$$\det g'(r, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r$$

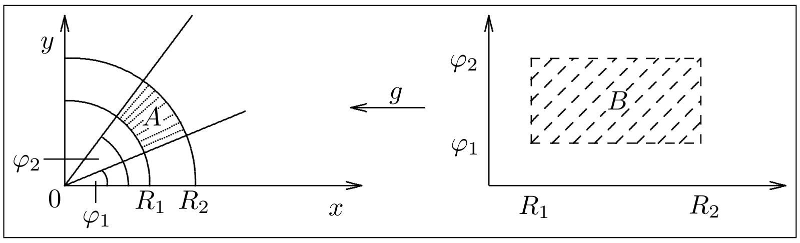



Abbildung 23.14.: Polarkoordinaten zur vereinfachten Integration

Substitutionsregel mit $A = g(B)$ :

$$\int\limits_A f(x, y)\, d(x, y) = \int\limits_B f\big(g(z)\big) \cdot \big|\det g'(z)\big|\, dz$$

$$= \boxed{\int\limits_B f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) \cdot r\, d(r, \varphi)}$$

($B$ ist Rechteck!)

**Beispiel 23.28.**

(1) $A := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\big\}$ (Kreisring) (vgl. Abb. 23.15). Berechne

$$\int\limits_A \sqrt{x^2 + y^2}\, d(x, y)$$

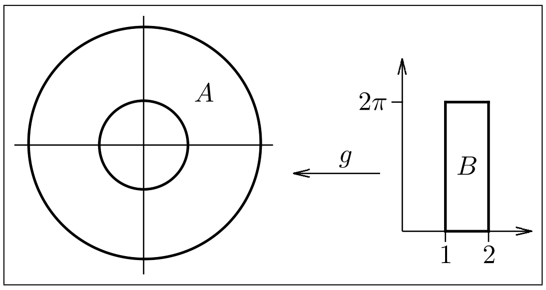



Abbildung 23.15.: Integration über einen Kreisring

*Achtung:* $g$ ist nicht injektiv auf $B = [1,2] \times [0,\, 2\pi]$. Auf $B_\varepsilon := [1,2] \times [0,\, 2\pi - \varepsilon]$ ist $g$ injektiv. Sei $A_\varepsilon := g^{-1}(B_\varepsilon)$.

$$\Rightarrow \int\limits_{A_\varepsilon} \sqrt{x^2+y^2}\; d(x,y) = \int\limits_{B_\varepsilon} r \cdot r\; d(r,\varphi) \underset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_0^{2\pi-\varepsilon} \left( \int\limits_1^2 r^2\; dr \right) d\varphi$$

$$= (2\pi - \varepsilon) \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_1^2 = (2\pi - \varepsilon) \cdot \frac{7}{3}$$

Für $\varepsilon \to 0$ geht (!)

$$\int\limits_{A_\varepsilon} \sqrt{x^2+y^2}\; d(x,y) \;\text{ gegen }\; \int\limits_A \sqrt{x^2+y^2}\; d(x,y)$$

$$\Rightarrow \int\limits_A \sqrt{x^2+y^2}\; d(x,y) = \frac{14}{3} \cdot \pi$$

(2) In der Wahrscheinlichkeitstheorie (und auch anderswo) spielt das Integral

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\; dx$$

eine große Rolle. Dieses Integral ist mit rein eindimensionalen Methoden nicht geschlossen berechenbar.

Für $R > 0$ setze

$$K_R := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; x, y \geq 0,\; x^2+y^2 \leq R^2 \right\}, \qquad Q_R := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; x, y \in [0,R] \right\}$$

$$\int\limits_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\; d(x,y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left( \int\limits_0^R e^{-r^2} r\; dr \right)}_{= -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^R} d\varphi = \frac{\pi}{4} \left( 1 - e^{-R^2} \right)$$

$$\int\limits_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)}\; d(x,y) \underset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_0^R \left( \int\limits_0^R e^{-x^2} e^{-y^2}\; dy \right) dx = \int\limits_0^R e^{-x^2} \left( \int\limits_0^R e^{-y^2}\; dy \right) dx$$

$$= \left( \int\limits_0^R e^{-x^2}\; dx \right)^2$$

Andererseits:

$$\int\limits_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) = \int\limits_{K_R} \cdots + \underbrace{\int\limits_{Q_R\setminus K_R} \cdots}_{\geq 0} \geq \int\limits_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\sqrt{1-e^{-R^2}}$$

Sei $\varrho := \sqrt{2}\cdot R$, dann $K_\varrho \supset Q_\varrho$. Wie oben:

$$\int\limits_{K_\varrho} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) = \frac{\pi}{4}(1-e^{-\varrho^2}) = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$$

andererseits:

$$\int\limits_{K_\varrho} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) = \int\limits_{Q_R} \cdots + \int\limits_{K_\varrho\setminus Q_R} \cdots \geq \int\limits_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) = \left(\int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2R^2}}$$

Zusammen mit obiger Gleichung:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}} \leq \int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2R^2}}$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Aus Symmetriegründen (bzw. nach Substitution $t = -x$):

$$\int\limits_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$$

[Schnelldurchgang:

$$\left(\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx\cdot\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\,dy \underset{\text{„Fubini“}}{=} \int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^\infty e^{-r^2} r\,dr\right)d\varphi = \pi]$$

(3) Rotationsparaboloid $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z \leq 4,\ z \geq 0\}$ Dann gilt:

$$|B| \underset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_A \left( \int\limits_0^{4-(x^2+y^2)} 1\ dz \right) d(x,y) = \int\limits_A (4-(x^2+y^2))\ d(x,y)$$
$$\underset{\text{Polark.}}{=} \int\limits_0^{2\pi} \left( \int\limits_0^2 (4-r^2) r\ dr \right) d\varphi = 2\pi \int\limits_0^2 (4r - r^3)\ dr = 8\pi$$

(vgl. Beispiel 23.23)

**Zylinderkoordinaten (im Fall $n=3$)** (vgl. Abb. 23.16)

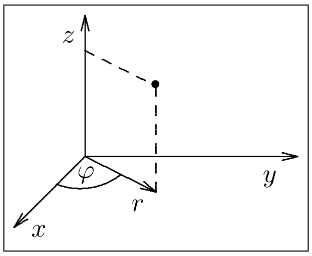



Abbildung 23.16.: Zylinderkoordinaten

$$g(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)$$

$$\boxed{x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z}$$

$$\det g'(r,\varphi,z) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

Also mit $A = g(B)$ nach Substitutionsregel:

$$\boxed{\int\limits_A f(x,y,z)\ d(x,y,z) = \int\limits_B f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z) \cdot r\ d(r,\varphi,z)}$$

**Beispiel 23.29.** $A := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq h\big\}$. Bestimme $|A|$:

(1) nach Cavalieri:

Für $z \in [0,h] :\ Q(z) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 1\big\}$

$$\Rightarrow\ q(z) = \big|Q(z)\big| = \pi$$

$$\Rightarrow\ |A| = \int\limits_0^h q(z)\ dz = \pi \cdot h$$

(2) mit Zylinderkoordinaten:

$$B := \big\{(r,\varphi,z):\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le h\big\}$$

(eigentlich: $B_\varepsilon := \big\{(r,\varphi,z):\ \varepsilon \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi - \varepsilon,\ 0 \le z \le h\big\} \rightsquigarrow$ Satz anwenden $\rightsquigarrow \varepsilon \to 0$ gehen lassen)

$$|A| = \int\limits_A 1\ d(x,y,z) = \int\limits_B r\ d(r,\varphi,z) = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^h\left(\int\limits_0^1 r\ dr\right)dz\right)d\varphi = 2\pi h \cdot \tfrac{1}{2} = \pi \cdot h$$

**Kugelkoordinaten ($n = 3$)** (vgl. Abb. 23.17)

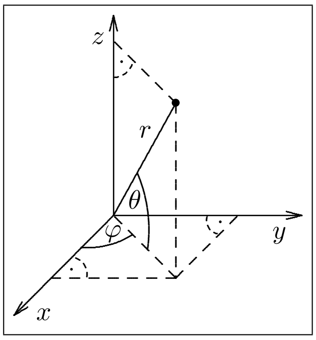



Abbildung 23.17.: Kugelkoordinaten

$$\boxed{x = r \cdot \cos\varphi\cos\theta, \quad y = r \cdot \sin\varphi\cos\theta, \quad z = r \cdot \sin\theta}$$

Dabei läuft $\varphi$ zwischen 0 und $2\pi$, $\theta$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$.

Also $g(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\theta)$.

$$\det g'(r,\varphi,\theta) = \det\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = r^2\cos\theta$$

$A = g(B)$; nach Substitutionsregel:

$$\boxed{\int\limits_A f(x,y,z)\ d(x,y,z) = \int\limits_B f(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\theta) \cdot r^2\cos\theta\ d(r,\varphi,\theta)}$$

**Beispiel 23.30.** $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x,y,z \ge 0\}$

$$B = \big\{(r,\varphi,\theta):\ r \in [0,1],\ \varphi \in [0,\tfrac{\pi}{2}],\ \theta \in [0,\tfrac{\pi}{2}]\big\}$$

z.B. suche

(1)

$$\begin{aligned}
\int\limits_A (x^2+y^2+z^2)\, d(x,y,z) &= \int\limits_B r^2 \left(r^2 \cos\theta\right)\ d(r,\varphi,\theta) \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int\limits_0^1 r^4\ dr \right) \cos\theta\ d\theta \right) d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\ d\theta = \frac{\pi}{10}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int\limits_A x\ d(x,y,z) &= \int\limits_B (r\cos\varphi\cos\theta)(r^2\cos\theta)\ d(r,\varphi,\theta) \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int\limits_0^1 r^3\ dr \right) \cos^2\theta\ d\theta \right) \cos\theta\ d\theta \\
&= \frac{1}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ d\varphi \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\ d\theta = \frac{\pi}{16}
\end{aligned}$$

# 24. Spezielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$, $F : D \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \text{(DGL)} \tag{24-i}$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.*

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $y : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so heißt $y$ eine *Lösung* von (24-i), wenn

$$\forall x \in I \qquad \big(x, y(x), y'(x)\big) \in D \quad \text{und} \quad F\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0$$

**Beispiel 24.1.** $F(x, y, z) := y - z$, $D = \mathbb{R}^3$, so lautet (24-i)

$$y - y' = 0$$

Allgemeine Lösung: $y(x) = c \cdot e^x$, $c \in \mathbb{R}$ beliebig, definiert auf $I = \mathbb{R}$.

## Anfangswertproblem (AWP)

$D, F$ wie oben und $(x_0, y_0) \in D$ gegeben. Das zur Differentialgleichung gehörige *Anfangswertproblem* verlangt zusätzlich zur Differentialgleichung die *Anfangsbedingung*

$$y(x_0) = y_0$$

Ist $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (24-i) mit der Zusatzeigenschaft $x_0 \in I$ und $y(x_0) = y_0$, so heißt $y$ *Lösung des Anfangswertproblems.*

**Beispiel 24.2.** wie oben $y' = y$. Allgemeine Lösung $y(x) = ce^x$ auf $I = \mathbb{R}$.

$$y(x_0) \overset{!}{=} y_0 \quad \Leftrightarrow \quad ce^{x_0} = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad c = y_0 e^{-x_0}$$

*Also:* Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{x - x_0}$$

**Beispiel 24.3.**

$$y' = 1 + y^2$$

Eine Lösung ist $y(x) = \tan x$ $\left(y'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\right)$

Weitere Lösungen:

$$y(x) = \tan(x + c), \quad c \in \mathbb{R}$$

Das Lösungsintervall $I$ ist hier $I = (-c - \frac{\pi}{2},\ -c + \frac{\pi}{2})$ bzw. $I = (n\pi - c - \frac{\pi}{2},\ n\pi - c + \frac{\pi}{2})$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

(hier (und meist auch sonst): $I$ hängt von der Lösung ab und ist *nicht a priori* bekannt)

Anfangswertproblem: $y(x_0) = y_0$

$$\tan(x_0 + c) \overset{!}{=} y_0 \quad \Rightarrow \quad c = -x_0 + \arctan(y_0) + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Lösung: $y(x) = \tan(x - x_0 + \arctan(y_0) + n\pi)$, definiert auf

$$I = \big(x_0 - \arctan y_0 + n\pi - \tfrac{\pi}{2},\ x_0 - \arctan y_0 + n\pi + \tfrac{\pi}{2}\big)$$

Wegen $x_0 \overset{!}{\in} I$ muss $n = 0$ sein.

$\Rightarrow$ Lösung: $y(x) = \tan\big(x - x_0 + \arctan(y_0)\big)$, definiert auf

$$I = \big(x_0 - \arctan y_0 - \tfrac{\pi}{2},\ x_0 - \arctan y_0 + \tfrac{\pi}{2}\big)$$

## 24.1. Exakte Differentialgleichungen

Es seien $I_1, I_2$ Intervalle in $\mathbb{R}$ (abgeschlossen, offen, halboffen, beschränkt, unbeschränkt)

$$R := I_1 \times I_2$$

Weiter seien $P, Q : R \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen.

**Definition 24.4.** Die Differentialgleichung

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \tag{24-ii}$$

heißt *exakt*, falls ein $F \in C^1(R, \mathbb{R})$ existiert mit

$$F_x = P, \quad F_y = Q \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

[Ein solches $F$ heißt auch *Stammfunktion* zu $(P, Q)$]

*Beachte:* Wenn ein solches $F$ existiert, so ist $F$ bis auf eine additive Konstante *eindeutig.*

Sei $I \subset I_1$, $y : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $y(x) \in I_2$ für $x \in I$ (also $(x, y(x)) \in R$ für alle $x \in I$)

Weiter sei die Differentialgleichung (24-ii) exakt und $F$ eine Stammfunktion zu $(P, Q)$.

Setze $\Phi(x) := F\big(x, y(x)\big)$ für $x \in I$.

Ist $y$ Lösung von (24-ii), so ist $\Phi$ differenzierbar auf $I$, und

$$\Phi'(x) = \underbrace{F_x\big(x, y(x)\big)}_{=P(x,y(x))} + \underbrace{F_y\big(x, y(x)\big)}_{Q(x,y(x))} \cdot y'(x) \underset{y \text{ Lsg.}}{=} 0$$

$\Rightarrow$ $\Phi$ konstant auf $I$

$$\Rightarrow \boxed{F\big(x, y(x)\big) = c \ \text{ für } x \in I}\ , \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

Auflösen nach $y(x)$ (falls möglich) liefert Lösung $y(x)$.

Gilt umgekehrt diese Gleichung für ein $c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \ \Phi' = 0 \quad \Rightarrow \quad y \textit{ ist } \text{Lösung von (24-ii)}$$

**Satz 24.5.** Ist (24-ii) exakt und $F$ eine Stammfunktion von $(P, Q)$ und ist $I \subset I_1$ ein Intervall, $y : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $y(x) \in I_2$ für alle $x \in I$, so gilt:

$$y \text{ ist Lösung von (24-ii) auf } I \ \Leftrightarrow \ \exists c \in \mathbb{R} \ \forall x \in I \quad F\big(x, y(x)\big) = c$$

**Beispiel 24.6.**

$$\underbrace{2x \sin y}_{=P(x,y)} + \underbrace{x^2 (\cos y)}_{=Q(x,y)} y' = 0, \qquad R = \mathbb{R}^2$$

Suche $F$ mit $F_x = 2x \sin y,\ F_y = x^2 \cos y$.

Wähle $F(x, y) = x^2 \sin y\ (+\tilde{c})$.

zu lösen:

$$F\big(x, y(x)\big) = x^2 \sin y(x) = c$$

$$\Rightarrow \ y(x) = \arcsin\left(\frac{c}{x^2}\right) \ \text{ auf } I = \cdots \ \text{(selbst)}$$

*Fragen:*

1. Wie kann man feststellen, ob (24-ii) exakt ist?
2. Wie kann man im Fall, dass (24-ii) exakt ist, eine Stammfunktion $F$ berechnen?
3. Wann kann man, falls (24-ii) exakt und $F$ bekannt ist, die Gleichung $F(x, y) = c$ nach $y$ (geschlossen, oder zumindest theoretisch) auflösen?

**Satz 24.7.** Es seien $P, Q \in C^1(R, \mathbb{R})$. Dann ist (24-ii) *genau dann exakt* (d.h. es existiert *genau dann* eine Stammfunktion zu $(P, Q)$), wenn

$$P_y = Q_x \ \text{ auf } \mathbb{R}$$

**Beweis:**

- „$\Rightarrow$“ Sei $F$ Stammfunktion zu $(P, Q)$, d.h. $F_x = P,\ F_y = Q$.

  $$\Rightarrow \ F \in C^2(R, \mathbb{R})$$

  und

  $$P_y = (F_x)_y = F_{xy} \underset{21.12}{=} F_{yx} = (F_y)_x = Q_x$$

- „$\Leftarrow$“ hier ohne Beweis

$\square$

*zu Frage 2:* (24-ii) sei exakt. Ansatz für $F$:

$$F_x(x,y) = P(x,y) \underset{y \text{ fest}}{\Rightarrow} F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + c(y)$$

Außerdem. $F_y(x,y) = Q(x,y)$, also

$$\left(\int P(x,y)\,dx\right)_y + c'(y) \overset{!}{=} Q(x,y)$$

$$\Rightarrow\ c'(y) = Q(x,y) - \left(\int P(x,y)\,dx\right)_y$$

Daraus $c(y)$ mittels Stammfunktionsbildung.

**Beispiel 24.8.**

$$\underbrace{(12xy+3)}_{P(x,y)} + \underbrace{6x^2}_{Q(x,y)}\,y' = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2$$

$$P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad P_y(x,y) = 12x = Q_x(x,y)$$

$\underset{24.7}{\Rightarrow}$ Differentialgleichung ist exakt.

$$F_x = 12xy + 3 \ \Rightarrow\ F(x,y) = 6x^2y + 3x + c(y)$$

$$\Rightarrow\ F_y(x,y) = 6x^2 + c'(y) \overset{!}{=} Q(x,y) = 6x^2$$

$$\Rightarrow\ c'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad c \text{ ist konstant}$$

$$\Rightarrow\ F(x,y) = 6x^2y + 3x \text{ ist eine Stammfunktion}$$

Jetzt $F(x,y) = c$ lösen:

$$6x^2y + 3x = c$$

$$\Rightarrow\ y(x) = \frac{c-3x}{6x^2} \text{ ist Lösung der Differentialgleichung auf } I = (0,\infty) \text{ oder } I = (-\infty, 0)$$

**Satz 24.9.** (24-ii) sei exakt, $F$ sei eine Stammfunktion zu $(P,Q)$ (bzw. „zu (24-ii)“).

Ferner sei $(x_0, y_0) \in R$ und sei $Q(x_0, y_0) \neq 0$.

Dann existiert in einer hinreichend kleinen Umgebung $I$ von $x_0$ ($I$ Intervall) eine *eindeutige* Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} P(x,y) + Q(x,y)y' &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Man erhält $y$, indem man die Gleichung

$$F\big(x, y(x)\big) = F(x_0, y_0)$$

nach $y(x)$ auflöst.

**Beweis:** $\Phi(x,y) := F(x,y) - F(x_0,y_0)$

$$\Rightarrow \ \Phi(x_0,y_0) = 0, \text{ und } \Phi_y(x_0,y_0) = F_y(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0) \neq 0$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (22.10):

$\exists$ Umgebung $U$ von $x_0$ und *genau* eine differenzierbare Funktion $y : U \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{und} \quad \Phi\big(x, y(x)\big) = 0 \text{ für alle } x \in U$$

Gegebenenfalls nach Verkleinerung von $U$: $U = I$ *Intervall.*

Also: $y(x_0) = y_0$ und $F\big(x, y(x)\big) = F(x_0, y_0)$ (konstant!)

Nach 24.5: $y$ löst die Differentialgleichung. □

**Beispiel 24.10.** $(12xy + 3) + 6x^2y' = 0$, $y(1) = 1$.

Dann $Q(x_0,y_0) = Q(1,1) = 6 \neq 0$

(allgemein: $Q(x_0,y_0) = 6x_0^2 \neq 0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0$)

s.o. $\Rightarrow$ $F(x,y) = 6x^2y + 3x$ ist eine Stammfunktion und $F(1,1) = 6 + 3 = 9$.

Also löse $F(x,y) = F(1,1) = 9$ nach $y$ auf.

Also: $6x^2y + 3x = 9$

$$\Rightarrow \ y(x) = \frac{3-x}{2x^2} \text{ auf } I = (0,\infty) \ \ (\text{damit } x_0 = 1 \in I)$$

Falls (24-ii) *nicht* exakt ist, so gibt es unter Umständen eine Funktion $\mu(x,y)$, so dass

$$\mu(x,y) \cdot P(x,y) + \mu(x,y) \cdot Q(x,y)y' = 0$$

exakt ist. Solch ein $\mu$ heißt *integrierender Faktor* von (24-ii).

Die Bedingung

$$(\mu \cdot P)_y = (\mu \cdot Q)_x$$

liefert eine sogenannte *partielle Differentialgleichung* für die Funktion $\mu$, die im Allgemeinen sehr schwierig zu lösen ist.

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \tag{24-iii}$$

Häufig hängt $\mu$ nur von einer Variablen ab, z.B. von $x$. Setzt man dann den Ansatz

$$\mu = \mu(x)$$

in (24-iii) ein, erhält man

$$\mu'(x) = \mu(x)\frac{P_y - Q_x}{Q}$$

**Beispiel 24.11.**

$$\underbrace{x\sin y + y\cos y}_{=P(x,y)} + \underbrace{(x\cos y - y\sin y)}_{=Q(x,y)}\, y' = 0$$

ist *nicht* exakt.

Ansatz mit einem integrierenden Faktor $\mu(x)$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{P_y - Q_x}{Q} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log|\mu| = x + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \; \mu(x) = ce^x, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\left[\int \frac{\mu'}{\mu}\, dx = \int 1\, dx \quad \Leftrightarrow \quad \log|\mu| = x + \tilde{c} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = ce^x\right]$$

Die Differentialgleichung

$$e^x(x\sin y + y\cos y) + \underbrace{e^x(x\cos y - y\sin y)}_{Q^*}\, y' = 0 \tag{24-iv}$$

ist exakt. (Probe!). Diese lösen wir

$$F(x,y) = \int e^x(x\sin y + y\cos y)\, dx + f(y) = e^x y\cos y + \sin(y)(x-1)e^x + f'(x)$$

Es muss gelten: $F_y = Q^*$

$$F_y = e^x\cos y - e^x y\sin y + \cos(y)(x-1)e^x + f'(x) \stackrel{!}{=} e^x(x\cos y - y\sin y)$$

$$\Leftrightarrow \; f'(y) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{wähle } f(y) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \; F(x,y) = e^x\big((x-1)\sin y + y\cos y\big)$$

ist Stammfunktion, die Lösungen von (24-iv) sind

$$F(x,y) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

in impliziter Form.

## 24.2. Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen

Wieder sei $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $R := I_1 \times I_2$. $f : I_1 \to \mathbb{R}$ und $g : I_2 \to \mathbb{R}$ seien stetig. Weiter sei

$$\forall y \in I_2 \quad g(y) \neq 0.$$

Die Differentialgleichung

$$y' = f(x) \cdot g(y) \tag{24-v}$$

heißt *Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen.*

(24-v) ist gleichbedeutend mit

$$\underbrace{f(x)}_{=:P(x,y)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{g(y)}\right)}_{=:Q(x,y)} y' = 0 \tag{24-vi}$$

Da $f, \frac{1}{g}$ stetig auf $I_1$ bzw. $I_2$, existieren Stammfunktionen $\Phi$ zu $f$ und $\Psi$ zu $\frac{1}{g}$.
Setze

$$F(x,y) := \Phi(x) - \Psi(y) \qquad \text{für } (x,y) \in R = I_1 \times I_2$$

$$\Rightarrow\ F_x = \Phi' = f\ (= P), \qquad F_y = -\Psi' = -\frac{1}{g}\ (= Q)$$

$\Rightarrow$ $F$ ist Stammfunktion zu $(P, Q)$.

$\Rightarrow$ (24-vi) ist exakt.

Ist $x_0 \in I_1$ und $y_0 \in I_2$, so wähle speziell

$$\Phi(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt, \qquad \Psi(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\, dt$$

Aus Abschnitt 24.1 folgt also:

**Satz 24.12.** $I_1, I_2, f, g$ wie oben.

(1) Lösungen von (24-v) erhält man, indem man die Gleichung

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx + c}$$

(mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig) nach $y$ auflöst. („differenzierbar“)

(2) Ist $x_0 \in I_1$, $y_0 \in I_2$, so ist die (*eindeutige*) Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x)g(y), \qquad y(x_0) = y_0$$

gegeben durch

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(y)}\, dy = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

(nach $y(x)$ auflösen)

*Schematisch* (formal):

$$\begin{aligned} y' = f(x)g(y) \quad &\rightsquigarrow \quad \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \\ &\rightsquigarrow \quad \frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx \\ &\rightsquigarrow \quad \int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx + c \end{aligned}$$

**Beispiel 24.13.**

(1) $y' = y$, $f(x) = 1$, $g(y) = y$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\int \underbrace{\frac{1}{g(y)}}_{=\frac{1}{y}} \, dy}_{=\log|y|} = \int f(x)\, dx + c$$

$$\rightsquigarrow |y| = e^{x+c} = \underbrace{e^c \cdot e^x}_{\neq 0}$$

$$\rightsquigarrow y = \underbrace{\pm e^c}_{=:\tilde{c}\in\mathbb{R}} \cdot e^x$$

(2) $y' = 1 + y^2$; $f(x) = 1$, $g(y) = 1 + y^2$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\int \frac{1}{1+y^2}\, dy}_{=\arctan(y)} = x + c$$

$$\rightsquigarrow y = \tan(x + c)$$

(3) $y' = -\frac{x}{y}$, $y(1) = 1$, $f(x) = -x$, $g(y) = \frac{1}{y}$

$$\rightsquigarrow \int y\, dy = -\int x\, dx + \tilde{c}$$

$$\rightsquigarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow\ y^2 = -x^2 + c \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = c$$

$$\Rightarrow\ y(x) = \pm\sqrt{c - x^2} \quad \text{(falls } c > 0,\ c \le 0 \text{ liefert keine Lösung)}$$

$y(1) = 1 \ \Rightarrow\ +$–Zeichen, und $1 \overset{!}{=} \sqrt{c-1} \ \Rightarrow\ c = 2$

$$y(x) = \sqrt{2 - x^2} \qquad \text{Lösung der Anfangswertaufgabe auf } I = \left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$$

(4) $y' = \frac{x \cdot e^{2x}}{y \cos y}$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$, $I_1 = \mathbb{R}$, $I_2 = (0, \frac{\pi}{2})$

$$\int y \cos y\, dy = \int x e^{2x}\, dx + c$$

partielle Integration liefert

$$y \sin y + \cos y = \tfrac{1}{4}(2x - 1)e^{2x} + c$$

Anfangswertproblem:

$$\underbrace{\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}}_{\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = \underbrace{\frac{1}{4}(2\cdot 0 - 1)e^{2\cdot 0}}_{=-\frac{1}{4}} + c$$

$$\Rightarrow\ c = \frac{1}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$y(x)\sin\big(y(x)\big) + \cos\big(y(x)\big) = \tfrac{1}{4}(2x - 1)e^{2x} + c$$

(Auflösung nach $y(x)$ möglich nach Satz über implizit definierte Funktionen [in einer Umgebung von $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{\pi}{4}$], aber nicht in geschlossener Form)

## 24.3. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha, s : I \to \mathbb{R}$ *stetig.*

Die Differentialgleichung

$$y' = \alpha(x)y + s(x) \tag{24-vii}$$

heißt *lineare* Differentialgleichung 1. Ordnung.

(24-vii) heißt *homogen*, falls $s(x) = 0\ \forall x \in I$, sonst *inhomogen*.

Sind $y_1, y_2$ Lösungen der homogenen Gleichung ($s \equiv 0$) auf $I$ und sind $a, b \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$(ay_1 + by_2)' = ay_1' + by_2' = a\alpha(x)y_1 + b\alpha(x)y_2 = \alpha(x)\big(ay_1 + by_2\big)$$

$\Rightarrow$ $ay_1 + by_2$ ist auch Lösung der homogenen Gleichung.

$\Rightarrow$ Lösungen der homogenen Gleichung bilden einen Vektorraum.

Weiter: Sind $y_1, y_2$ Lösungen der *inhomogenen* Gleichung

$$\Rightarrow\ (y_1 - y_2)' = \big[\alpha(x)y_1 + s(x)\big] - \big[\alpha(x)y_2 + s(x)\big] = \alpha(x)\big(y_1 - y_2\big)$$

$\Rightarrow$ $y_1 - y_2$ ist Lösung der *homogenen* Gleichung.

Ist $y$ Lösung der homogenen, $y_p$[1] Lösung der inhomogenen Gleichung, so ist

$$(y + y_p)' = \alpha(x)y + \big[\alpha(x)y_p + s(x)\big] = \alpha(x)\big(y + y_p\big) + s(x)$$

$\Rightarrow$ $y + y_p$ ist Lösung der inhomogenen Gleichung.

*Also:* Die Menge aller Lösungen des inhomogenen Problems ist gegeben durch

$$\boxed{\{y_p + y :\ y \text{ Lösung des homogenen Problems}\}}$$

wobei $y_p$ eine *feste* spezielle Lösung des inhomogenen Problems ist.

Zunächst bestimme die allgemeine Lösung des *homogenen* Problems:

**Satz 24.14.** $I, \alpha$ wie oben. $\beta : I \to \mathbb{R}$ sei eine Stammfunktion von $\alpha$. Dann ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (24-vii) ($y' = \alpha(x)y$) gegeben durch

$$y(x) = Ce^{\beta(x)} \qquad \text{für } x \in I,$$

mit beliebigem $C \in \mathbb{R}$.

$\big[$Beachte: $y' = \alpha(x)y \quad \rightsquigarrow \quad \int \frac{1}{y}\ dy = \int \alpha(x)\ dx + \tilde{c} \quad \rightsquigarrow \quad \log(y) = \beta(x) + \tilde{c} \quad \rightsquigarrow \quad y = Ce^{\beta(x)}\big]$

[1] p = „partikulär“

**Beweis:** Zunächst gilt für $y(x) := Ce^{\beta(x)}$ (mit $C \in \mathbb{R}$):

$$y'(x) = C\underbrace{\beta'(x)}_{=\alpha(x)}e^{\beta(x)} = \alpha(x)y(x)$$

$\Rightarrow$ *ist* Lösung.

Sei nun $y$ irgendeine Lösung der homogenen Gleichung. Setze

$$z(x) = e^{\beta(x)}, \qquad \Phi(x) := \frac{y(x)}{z(x)}$$

$$\Rightarrow\ \Phi'(x) = \frac{\overbrace{y'(x)}^{=\alpha(x)y(x)}\ z(x) - y(x)\ \overbrace{z'(x)}^{=\alpha(x)z(x)}}{z(x)^2} = 0 \quad \text{für alle } x \in I$$

$$\Rightarrow\ \Phi(x) = C \quad (x \in I) \quad \text{mit einem } C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\ y(x) = Cz(x) = Ce^{\beta(x)} \quad \text{für alle } x \in I$$

□

**Beispiel 24.15.**

(1)

$$y' = \underbrace{(\sin x)}_{=:\alpha(x)}y, \quad (I = \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow\ \beta(x) = -\cos x$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $y(x) = Ce^{-\cos x}$

(2) Anfangswertproblem: $y' = (\sin x)y$, $y(0) = 1$

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} y(x) = Ce^{-\cos x}, \qquad C \cdot e^{-\cos 0} \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad C = e$$

$\Rightarrow$ Lösung: $y(x) = e^{1-\cos x}$

(3) $y' = \frac{1}{x}y$, $y(1) = 2$, $I = (0, \infty)$, $\alpha(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow\ \beta(x) = \log x$$

$\Rightarrow$ allgm. Lösung der Differentialgleichung: $y(x) = Ce^{\log x} = Cx$

Anfangswertproblem: $C \cdot 1 = 2 \Rightarrow C = 2$

$\Rightarrow$ Lösung: $y(x) = 2x$

Aus 24.14 erhält man insbesondere:

**Korollar 24.16.** $I, \alpha$ wie oben. Sei $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Dann hat das Anfangswertproblem

$$y' = \alpha(x)y, \qquad y(x_0) = x_0$$

*genau eine* Lösung.

**Beweis:** 24.14 $\Rightarrow y(x) = Ce^{\beta(x)}$ allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Anfangsbedingung: $Ce^{\beta(x_0)} \overset{!}{=} y_0 \Rightarrow C = y_0 e^{-\beta(x_0)}$ *eindeutig*

$$\Rightarrow \; y(x) = y_0 e^{\beta(x)-\beta(x_0)} \quad \text{eindeutige Lösung}$$

□

Wir brauchen (wegen der linearen Struktur, s.o.) nun eine spezielle Lösung des *inhomogenen* Problems.

Sei wieder $\beta$ Stammfunktion zu $\alpha$.

*Ansatz* für eine spezielle (partikuläre) Lösung:

$$y_p(x) = C(x)e^{\beta(x)} \qquad \text{„\textit{Variation der Konstanten}“}$$

$$\Rightarrow \; y_p'(x) = C'(x)e^{\beta(x)} + C(x)\underbrace{\beta'(x)}_{=\alpha(x)}e^{\beta(x)}$$

$$\alpha(x)y_p(x) + s(x) = \alpha(x)C(x)e^{\beta(x)} + s(x)$$

D.h. $y_p$ löst das inhomogene Problem genau dann, wenn

$$C'(x)e^{\beta(x)} = s(x)$$

$$\Leftrightarrow \; C'(x) = e^{-\beta(x)}s(x)$$

$$\Leftrightarrow \; C(x) = \int^x e^{-\beta(t)}s(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \; \boxed{y_p(x) = e^{\beta(x)} \int^x e^{-\beta(t)}s(t)\,dt} \quad \text{spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung}$$

Insgesamt erhält man:

**Satz 24.17.** Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (24-vii) ist gegeben durch ($\beta$ Stammfunktion zu $\alpha$)

$$\boxed{y(x) = Ce^{\beta(x)} + e^{\beta(x)} \int^x e^{-\beta(t)}s(t)\,dt}$$

Die lineare Differentialgleichung (24-vii), zusammen mit der Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0$$

(mit $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ beliebig) wird also *eindeutig* gelöst durch

$$y(x) = e^{\beta(x)-\beta(x_0)} \cdot y_0 + e^{\beta(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-\beta(t)}s(t)\,dt$$

(auf ganz $I$)

**Beispiel 24.18.**

(1) $y' = (\sin x)y + \sin x$

Die Stammfunktion zu $\alpha(x) = \sin x$: $\beta(x) = -\cos x$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$y(x) = Ce^{-\cos x} + e^{-\cos x} \int^x \underbrace{e^{\cos t}(\sin t)}_{=(-e^{\cos t})'} \, dt = Ce^{-\cos x} - 1$$

(2) $y' = 2xy + x$

Stammfunktion zu $\alpha(x) = 2x$: $\beta(x) = x^2$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$y(x) = Ce^{x^2} + e^{x^2} \int^x \underbrace{e^{-t^2} t}_{(-\frac{1}{2}e^{-t^2})'} \, dt = Ce^{x^2} - \tfrac{1}{2}$$

Dann Anfangsbedingung $y(0) = 1$:

$$1 = Ce^{0^2} - \tfrac{1}{2} = C - \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C = \tfrac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = \tfrac{3}{2}e^{x^2} - \tfrac{1}{2}$$

## 24.4. Bernoullische Differentialgleichung

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall; $g, h : I \to \mathbb{R}$ stetig. Die Differentialgleichung

$$y' + g(x)y + h(x)y^{\varrho} = 0 \tag{24-viii}$$

(mit $\varrho \in \mathbb{R}$ fest) heißt Bernoulli*sche Differentialgleichung.*

In den beiden Fällen $\varrho = 0$ und $\varrho = 1$ ist sie linear.

Im folgenden sei also $\varrho \neq 0, \varrho \neq 1$.

Es gilt für $\boxed{z := y^{1-\varrho}}$ („Variablentransformation“)

$$\begin{aligned} z' &= (1-\varrho)y^{-\varrho} \cdot y' = (1-\varrho)y^{-\varrho}\left[-g(x)y - h(x)y^{\varrho}\right] \\ &= \boxed{-(1-\varrho)g(x)z - (1-\varrho)h(x)} \end{aligned} \tag{24-ix}$$

*lineare* Differentialgleichung für $z$.

Lösen; dann löst $y := z^{\frac{1}{1-\varrho}}$ (24-viii).

Hier muss ggf. das Intervall, auf dem $y$ definiert ist, gegenüber dem, auf dem $z$ definiert ist, weiter eingeschränkt werden, damit $y := z^{\frac{1}{1-\varrho}}$ dort wohldefiniert ist.

**Beispiel 24.19.** $y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0$

$$\begin{aligned} z &= y^{1-4} = \frac{1}{y^3} \\ z' &= -\frac{3}{y^4}y' = \frac{3}{y^4}\left(\frac{y}{1+x} + (1+x)y^4\right) = \frac{3}{1+x}z + 3(1+x) \end{aligned}$$

Anfangsbedingung: $z(0) = \frac{1}{(-1)^3} = -1$

Eindeutige Lösung: (Stammfunktion zu $\alpha(x) = \frac{3}{1+x}$: $\beta(x) = 3\log(1+x) = \log(1+x)^3$)

$$\begin{aligned} z(x) &= (-1)\cdot e^{\log(1+x)^3 - \log(1+0)^3} + e^{\log(1+x)^3}\int_0^x \underbrace{e^{-\log(1+t)^3}\cdot 3(1+t)}_{=\frac{3}{(1+t)^2}}\,dt \\ &= -(1+x)^3 + (1+x)^3\cdot \underbrace{\left[-\frac{3}{1+t}\right]_0^x}_{=-\frac{3}{1+x}+3} \\ &= 2(1+x)^3 - 3(1+x)^2 = (1+x)^2\big[2(1+x)-3\big] \\ &= (1+x)^2(2x-1) \qquad \text{(def. auf ganz } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Jetzt:

$$y(x) = z(x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2(2x-1)}}$$

definiert auf $I = \left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$.

## 24.5. RICCATIsche Differentialgleichung

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall; $g, h, k : I \to \mathbb{R}$ stetig. Die Differentialgleichung

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x) \tag{24-x}$$

heißt RICCATI*sche Differentialgleichung.*

Sind $y_1, y_2$ Lösungen von (24-x), so setze $u := y_1 - y_2$.

Dann:

$$\begin{aligned} u' &= \big[-g(x)y_1 - h(x)y_1^2 + k(x)\big] - \big[-g(x)y_2 - h(x)y_2^2 + k(x)\big] \\ &= -g(x)u - h(x)\underbrace{(y_1^2 - y_2^2)}_{=u(u+2y_2)} \\ &= -g(x)u - h(x)u^2 - 2h(x)y_2\cdot u \\ &= -\big(g(x) + 2h(x)y_2(x)\big)u - h(x)u^2 \qquad \text{(BERNOULLIsche Differentialgleichung für } u) \end{aligned}$$

*Also: Falls eine* Lösung $y_2$ von (24-x) bekannt ist (in der Regel durch „scharfes Hinsehen“), so bestimme die allgemeine Lösung $u$ obiger BERNOULLI–Differentialgleichung; dann ist mittels

$$y = y_2 + u$$

die allgemeine Lösung von (24-x) bekannt.

# 25. Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung

## 25.1. Allgemeines

Ein *System* von Differentialgleichungen 1. Ordnung besteht aus $n$ Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\
y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\
&\vdots \\
y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n)
\end{aligned}
$$

mit gegebenen $f_1, \ldots, f_n : D \to \mathbb{R}$ (wobei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$) und gesuchten (unbekannten) $y_1, \ldots, y_n$.

*Abkürzungen:* $y := (y_1, \ldots, y_n)$ (vektorwertige Funktion)

Punkte $(x, y_1, \ldots, y_n) \in D$ schreibe als $(x, y)$.

$f := (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$.

Obiges System kann also geschrieben werden als

$$y' = f(x, y) \tag{25-i}$$

Ist $I \subset \mathbb{R}$ *Intervall* und $y = (y_1, \ldots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$ *differenzierbar* auf $I$ (also $y_1, \ldots, y_n$ differenzierbar), so heißt $y$ eine *Lösung von* (25-i), wenn:

$$\forall x \in I \quad \big(x, y(x)\big) \in D \quad \text{und} \quad y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$$

Ist $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $(x_0, y_0) \in D$, so heißt

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{25-ii}$$

ein *Anfangswertproblem* für das Differentialgleichungs-System (25-i).

Ist $y$ eine Lösung von (25-i) auf $I$ und gilt $x_0 \in I$ sowie $y(x_0) = y_0$, so heißt $y$ eine *Lösung des Anfangswertproblems* (25-ii).

**Satz 25.1** (Existenzsatz von PEANO)**.** $f : D \to \mathbb{R}^n$ sei *stetig* auf $D$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sei offen, und es sei $(x_0, y_0) \in D$.

Dann hat das Anfangswertproblem (25-ii) eine Lösung. (auf einem möglicherweise „kleinen“ Intervall $I \ni x_0$)

**Definition 25.2.** Sei $g = (g_1, \dots, g_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit $g_j \in R[a, b]$ $(j = 1, \dots, n)$.

Dann setze

$$\int_a^b g(t)\, dt := \left( \int_a^b g_1(t)\, dt, \dots, \int_a^b g_n(t)\, dt \right) \in \mathbb{R}^n$$

**Satz 25.3** (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf)**.** Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(x_0, y_0) \in D$.

Ferner genüge $f$ auf $D$ einer Lipschitz–*Bedingung bzgl.* $y$, d.h. es existiert ein $L \geq 0$ mit

$$\forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in D \quad \|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|$$

Dann hat das Anfangswertproblem (25-ii) *genau eine Lösung* (auf einem möglicherweise „kleinen“ Intervall $I \ni x_0$).

Setzt man bei „geeignetem“ $y^{(0)} \in C(I, \mathbb{R}^n)$ ($I$ hinreichend klein)

$$y^{(k+1)}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y^{(k)}(t)\right)\, dt \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

so konvergiert die Folge $\left(y^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $I$ gegen die Lösung des Anfangswertproblems. (Beachte: $k$ ist hier Folgenindex, keine Ableitung.)

**Bemerkung 25.4.** Statt einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sind auch Mengen der Form

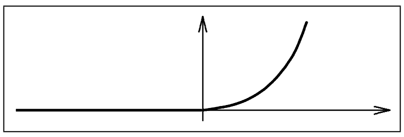
$$D = [a, b] \times \mathbb{R}^n$$

zulässig, sowohl für 25.1 als auch für 25.3.

**Beispiel 25.5.** $n = 1$, $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$. (Differentialgleichung mit getrennten Variablen)

Lösen $\rightsquigarrow y(x) = \frac{1}{4}x^2$ (für $x \geq 0$)

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}}$$



Außerdem: $\boxed{y \equiv 0}$ ist Lösung des Anfangswertproblems.

[Weitere Lösungen: vgl. Abb. 25.1]

$f(x, y) := \sqrt{|y|}$ ist in der Tat *stetig*, aber $f$ genügt keiner Lipschitz–Bedingung bzgl. $y$:

*Annahme:* Es existiert ein $L \geq 0$ mit $\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|$ für alle $x, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}$, dann also.

$$\left|\sqrt{|y|} - \sqrt{|\tilde{y}|}\right| \leq L|y - \tilde{y}| \underset{y\cdot\tilde{y}>0}{=} L\left|\sqrt{|y|} - \sqrt{|\tilde{y}|}\right| \cdot \left(|\sqrt{|y|} + \sqrt{|\tilde{y}|}\right)$$

$$\underset{y\neq\tilde{y}}{\Leftrightarrow} 1 \leq L\left(\sqrt{|y|} + \sqrt{|\tilde{y}|}\right) \quad \text{↯ für } |y|, |\tilde{y}| \text{ hinreichend klein}$$

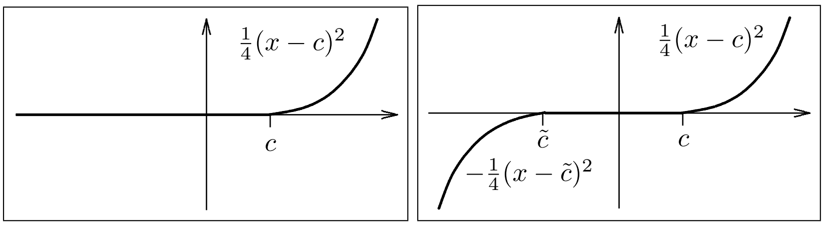



Abbildung 25.1.: Weitere Lösungen zum Beispiel 25.5

**Satz 25.6.** Es sei $D = I \times \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ (kompaktes) Intervall. $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Die partielle Ableitung $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ mögen auf $D$ existieren und seien *beschränkt* auf $D$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Dann gilt die Behauptung des Satzes von Picard–Lindelöf 25.3. Die eindeutige Lösung ist ferner auf ganz $I$ definiert.

**Beweisidee:** Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$\left|f_i(x,y) - f_i(x,\tilde{y})\right| = \left|(\operatorname{grad} f_i)(x,\eta) \cdot (y - \tilde{y})\right|$$

mit $\eta \in$ Verbindunsstrecke zwischen $y$ und $\tilde{y}$.

$$\Rightarrow \ \left|f_i(x,y) - f_i(x,\tilde{y})\right| \ \le \ \underbrace{\left\|(\operatorname{grad} f_i)(x,\eta)\right\|}_{\le L \text{ (solch ein } L \text{ ex.)}} \cdot \|y - \tilde{y}\|$$

$\Rightarrow$ Lipschitz–Bedingung. $\square$

Für den Rest des Abschnittes spezialisieren wir uns auf den Fall:

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a_{jk} : I \to \mathbb{R}$ gegebene stetige Funktionen $(j, k = 1, \ldots, n)$, und $b_1, \ldots, b_n : I \to \mathbb{R}$ stetig; setze

$$A(x) := \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad b(x) := \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

Das zu untersuchende System ist

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = A(x) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + b(x); \qquad \text{kurz: } y' = A(x)y + b(x)$$

dieses System heißt *lineares* Differentialgleichungssystem.

**Satz 25.7.** Sei $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y' = A(x)y + b(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung auf ganz $I$.

**Beweisskizze:** $f(x,y) := A(x)y + b(x)$ stetig auf $D := I \times \mathbb{R}^n$

Sei $[a,b]$ kompaktes Intervall mit $x_0 \in [a,b] \subset I$.

Dann gilt:

$$\forall x \in [a,b],\ y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n \quad \left\| f(x,y) - f(x,\tilde{y}) \right\| \ = \ \left\| A(x) \cdot (y - \tilde{y}) \right\| \ \leq \ \underbrace{\left\| A(x) \right\|}_{\substack{\leq \max\limits_{x \in [a,b]} \|A(x)\| \\ =: L}} \cdot \|y - \tilde{y}\|$$

$\Rightarrow$ LIPSCHITZ–Bedingung

$\underset{25.3}{\Rightarrow}$ Eindeutige Lösung des Anfangswertproblems auf $[a,b]$.

$\Rightarrow$ Eindeutige Lösung auf $I$. □

**Satz 25.8.**

(1) Durchläuft $y_h$ alle Lösungen des *homogenen* Systems

$$y' = A(x)y$$

und ist $y_p$ eine spezielle Lösung des *inhomogenen* Systems

$$y' = A(x)y + b(x) \tag{25-iii}$$

so durchläuft $y_h + y_p$ alle Lösungen von (25-iii).

(2) Die Lösungen des homogenen Systems $y' = A(x)y$ bilden einen Vektorraum $V$.

(3) Für $y^{(1)}, \ldots, y^{(k)} \in V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $y^{(1)}, \ldots, y^{(k)}$ sind linear unabhängig.

(b) $\forall \xi \in I \ \ y^{(1)}(\xi), \ldots, y^{(k)}(\xi)$ sind linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$.

(c) $\exists \xi \in I \ \ y^{(1)}(\xi), \ldots, y^{(k)}(\xi)$ sind linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$.

(4) Sei $\xi \in I$, und für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $z^{(j)}$ die (eindeutige!) Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = A(x)y, \qquad y(\xi) = e_j$$

Dann ist $\left\{z^{(1)}, \ldots, z^{(n)}\right\}$ eine Basis von $V$. Insbesondere gilt also $\dim V = n$.

**Beweis:**

(1) wie im Fall $n = 1$.

(2) $(\alpha y_1 + \beta y_2)' = A(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(3)

- „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Sei $\xi \in I$ und seien $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$,

  $$c_1 y^{(1)}(\xi) + \cdots + c_k y^{(k)}(\xi) = 0$$

  Setze $y := c_1 y^{(1)} + \cdots + c_k y^{(k)} \underset{(2)}{\in} V$, d.h. $y' = A(x)y$, und es gilt $y(\xi) = 0$.

  $\Rightarrow y$ löst das Anfangswertproblem $y' = A(x)y,\ y(\xi) = 0$.

  Die Funktion $\equiv 0$ löst dieses Anfangswertproblem ebenfalls!

  Lösung *eindeutig* (25.7) $\Rightarrow y \equiv 0$ auf $I$

  $$\Rightarrow \ c_1 y^{(1)} + \cdots + c_k y^{(k)} \equiv 0 \text{ auf } I$$

  $\Rightarrow \ c_1 = \cdots = c_k = 0$, da $y^{(1)}, \ldots, y^{(k)} \in V$ linear unabhängig.

- „(b) $\Rightarrow$ (c)": klar ($I \neq \emptyset$)
- „(c) $\Rightarrow$ (a)": Seien $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ und

$$c_1 y^{(1)} + \dots + c_k y^{(k)} \equiv 0 \text{ auf } I$$

$$\Leftrightarrow \ \forall x \in I \quad c_1 y^{(1)}(x) + \dots + c_k y^{(k)}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \ c_1 y^{(1)}(\xi) + \dots + c_k y^{(k)}(\xi) = 0 \quad (\text{mit } \xi \text{ aus (c)})$$

$$\underset{(c)}{\Rightarrow} \ c_1 = \dots = c_k = 0$$

(4) Nach (3) sind $z^{(1)}, \dots, z^{(n)}$ linear unabhängig in $V$, denn

$$z^{(1)}(\xi) = e_1, \dots, z^{(n)}(\xi) = e_n \text{ sind linear unabhängig in } \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \ \dim V \geq n$$

Wäre $\dim V > n$, so existiere ein $y^{(0)} \in V$ mit

$$z^{(1)}, \dots, z^{(n)}, y^{(0)} \text{ linear unabhängig in } V$$

$$\underset{(3)}{\Rightarrow} \ \underbrace{z^{(1)}(\xi), \dots, z^{(n)}(\xi), \ y^{(0)}(\xi)}_{n+1 \text{ Vektoren}} \text{ linear unabhängig in } \mathbb{R}^n \quad \lightning$$

$\square$

**Definition 25.9.** $n$ linear unabhängige Lösungen von $y' = A(x)y$ (also eine Basis von $V$) nennt man auch ein *Fundamentalsystem* (FS) von $y' = A(x)y$.

Die konkrete Berechnung eines Fundamentalsystems ist unter den bisher gemachten allgemeinen Bedingungen i.a. nicht möglich.

## 25.2. Lineare Differentialgleichungs-Systeme

Betrachte nun den Spezialfall, dass die Funktionen $a_{jk} : I \to \mathbb{R}$ alle *konstant* sind. Wir betrachten also jetzt das *lineare Differentialgleichungs-System mit konstanten Koeffizienten*

$$y' = Ay + b(x). \tag{25-iv}$$

und zunächst das homogene System

$$y' = Ay \tag{25-v}$$

Es sei $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ das charakteristische Polynom von $A$. Also gilt:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \lambda \text{ Eigenwert von } A \ \Leftrightarrow \ p(\lambda) = 0$$

Da $A$ in unserem Fall *reelle* Koeffizienten hat, gilt:

Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $A \Rightarrow p(\lambda) = 0$

$$\Rightarrow \ \overline{p(\lambda)} = 0 \underset{\text{Koeff. reell}}{\Longrightarrow} p(\overline{\lambda}) = 0$$

$$\Rightarrow \ \overline{\lambda} \text{ ist Eigenwert von } A$$

**Satz 25.10** (Lösungsverfahren für $y' = Ay$).

(1) Bestimme die *verschiedenen* Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ von $p$, also gilt

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

mit $k_1, \dots, k_r \in \{1, \dots, n\}$.

Es gelte etwa:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}; \qquad \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

Also

$$\begin{aligned} \lambda_{m+1} &= \mu_1, \dots, \lambda_{m+s} = \mu_s \\ \lambda_{m+s+1} &= \overline{\mu_1}, \dots, \lambda_{m+2s} = \overline{\mu_s} \end{aligned}$$

(Kann im Falle $n \geq 5$ schiefgehen, da die Nullstellen von $p(\lambda)$ dann möglicherweise nicht durch „Radikale“ (geschlossene Formeln) bestimmbar sind.)

(2) Für $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+s}$ bestimme eine Basis von

$$\text{Kern}\left((A - \lambda_j I)^{k_j}\right)$$

($\lambda_{m+s+1} = \overline{\mu_1}, \dots, \lambda_{m+2s} = \overline{\mu_s}$ bleiben unberücksichtigt)

(3) Sei $j \in \{1, \dots, m+s\}$ und $v$ einer der in (2) bestimmten Basisvektoren von Kern $\left((A - \lambda_j I)^{k_j}\right)$.

Dann existiert ein $m_j \leq k_j$ ($m_j$ abhängig von $v$) mit

$$(A - \lambda_j I)^{m_j} v = 0, \qquad (A - \lambda_j I)^{m_j - 1} v \neq 0$$

Setze

$$y(x) := e^{\lambda_j x} \left[ v + x(A - \lambda_j I)v + \frac{x^2}{2}(A - \lambda_j I)^2 v + \dots + \frac{x^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!}(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} v \right]$$

Ist $\lambda_j \in \mathbb{R}$ (also $j \in \{1, \dots, m\}$) $\Rightarrow$ $y(x) \in \mathbb{R}^n$ und $y$ löst $y' = Ay$ $\leftarrow$ Beitrag zum FS.

Ist $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (also $j \in \{m+1, \dots, r\}$)

$\Rightarrow$ $\text{Re}\big(y(x)\big)$, $\text{Im}\big(y(x)\big)$ (komponentenweise) lösen $y' = Ay$

$\Rightarrow$ $\text{Re}\, y$, $\text{Im}\, y$ *beide* Beitrag zum Fundamentalsystem.

Führt man (3) für jedes $\lambda_j$ ($j = 1, \dots, m+s$) und jeden Basisvektor $v$ von Kern$\left((A - \lambda_j I)^{k_j}\right)$ durch, so erhält man insgesamt ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$ (beachte $\sum\limits_{j=1}^{r} k_j = n$)

**Spezialfall:** $A$ sei reell diagonalisierbar, also existiert eine Basis $(\psi_1, \dots, \psi_b)$ von Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Ein Fundamentalsystem $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ von $y' = Ay$ ist gegeben durch

$$y^{(j)}(x) := e^{\lambda_j x} \psi_j$$

**Beweis:**

$$\left(y^{(j)}\right)' = \lambda_j e^{\lambda_j x} \psi_j = e^{\lambda_j x} \underbrace{(\lambda_j \psi_j)}_{= A\psi_j} = A\left(e^{\lambda_j x} \psi_j\right) = A y^{(j)}(x)$$

Außerdem sind $\big(y^{(1)}(0), \dots, y^{(n)}(0)\big) = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ linear unabhängig.

$\Rightarrow y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ linear unabhängig in $V$. $\square$

**Beispiel 25.11.**

(1)

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} y$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 \qquad (\Rightarrow\ \lambda_1 = 2,\ k_1 = 1; \quad \lambda_2 = 1,\ k_2 = 2)$$

$\lambda_1 = 2$:

$$\operatorname{Kern}(A - 2I) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow\ y^{(1)}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$:

$$\operatorname{Kern}(A - I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Kern}\big((A - I)^2\big) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Also

$$(A - I) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad (A - I) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ y^{(2)}(x) &= e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix} \\ y^{(3)}(x) &= e^x \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x(A - I) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^x \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} -xe^x \\ -xe^x \\ e^x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung von $y' = Ay$:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y^{(1)}(x) + c_2 y^{(2)}(x) + c_3 y^{(3)}(x) \\ &= \begin{pmatrix} c_2 e^x - c_3 x e^x \\ c_1 e^{2x} + c_2 e^x - c_3 x e^x \\ c_1 e^{2x} + c_3 e^x \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(2)

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} y$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda + 2)\big[\lambda - (1+i)\big] \cdot \big[\lambda - (1-i)\big]$$

$\lambda_1 = -2$:

$$\operatorname{Kern}(A + 2I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow\ y^{(1)}(x) = e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1 + i$:

$$\operatorname{Kern}\big(A - (1+i)I\big) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-2i \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} e^{(1+i)x} \begin{pmatrix} 2-2i \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix} &= e^x(\cos x + i \sin x) \begin{pmatrix} 2-2i \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \\ &= e^x \begin{pmatrix} 2\cos x - 2i\cos x + 2i \sin x + 2\sin x \\ 2\cos x + 2i \sin x \\ \cos x + i\cos x + i \sin x - \sin x \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{e^x \begin{pmatrix} 2\cos x + 2\sin x \\ 2\cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix}}_{=:y^{(2)}(x)} + i \underbrace{e^x \begin{pmatrix} 2\sin x - 2\cos x \\ 2\sin x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix}}_{=:y^{(3)}(x)} \end{aligned}$$

(3)

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} y$$

$$p(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$$

$$\operatorname{Kern}(A - I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Kern}\big((A - I)^2\big) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Kern}\big((A - I)^3\big) = \mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow\ (A-I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad (A-I)\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}\qquad (A-I)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad (A-I)^2\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad (A-I)^2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ y^{(1)}(x)&=e^x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\ y^{(2)}(x)&=e^x\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+x(A-I)\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right]=e^x\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}\right]\\ y^{(3)}(x)&=e^x\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+x(A-I)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{x^2}{2}(A-I)^2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]\\ &=e^x\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\frac{x^2}{2}\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}\right]\end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt die inhomogene Gleichung

$$y'=Ay+b(x);\qquad b:I\to\mathbb{R}\text{ stetig}$$

Wir können jetzt sogar wieder $x$–abhängiges $A$ zulassen. Wir brauchen allerdings ein Fundamentalsystem von $y'=A(x)y$.

Sei $y^{(1)},\ldots,y^{(n)}$ ein Fundamentalsystem; bilde daraus die sog. *Fundamentalmatrix*

$$Y(x):=\left(y^{(1)}(x)\ \middle|\ y^{(2)}(x)\ \middle|\ \cdots\ \middle|\ y^{(n)}(x)\right)$$

Die allgemeine Lösung von $y'=A(x)y$ lautet:

$$c_1y^{(1)}(x)+c_2y^{(2)}(x)+\cdots+c_ny^{(n)}(x)=Y(x)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=Y(x)c\ \text{ mit }\ c=(c_1,\ldots,c_n)\in\mathbb{R}^n$$

Ansatz für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_p(x)=Y(x)c(x)\qquad \text{„Variation der Konstanten“}$$

($c=(c_1,\ldots,c_n)$, $c_j$ differenzierbar)

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ y_p'(x)&=\left(\left(y^{(1)}\right)'(x)\ \middle|\ \cdots\ \middle|\ \left(y^{(n)}\right)'(x)\right)c(x)+Y(x)c'(x)\\ &=\left(A(x)y^{(1)}(x)\ \middle|\ \cdots\ \middle|\ A(x)y^{(n)}(x)\right)c(x)+Y(x)c'(x)\\ &=A(x)Y(x)c(x)+Y(x)c'(x)\\ &=A(x)y_p(x)+Y(x)c'(x)\\ &\overset{!}{=}A(x)y_p(x)+b(x)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(x)c'(x) = b(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad c'(x) = Y(x)^{-1}b(x) \qquad \text{(da } y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x) \text{ linear unabhängig, also } Y(x) \text{ invertierbar)}$$

$$\Leftrightarrow \quad c(x) = \int^x Y(t)^{-1}b(t)\,dt \quad \text{(komponentenweise)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_p(x) = Y(x)\int^x Y(t)^{-1}b(t)\,dt}$$

ist spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $y' = A(x)y + b(x)$.

$\Rightarrow$ *Allgemeine* Lösung der inhomogenen Gleichung ist also

$$\boxed{y(x) = Y(x)c + Y(x)\int^x Y(t)^{-1}b(t)\,dt,} \qquad c \in \mathbb{R}^n \text{ beliebig}$$

**Beispiel 25.12.**

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem

$$y^{(1)}(x) := e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y^{(2)}(x) := e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Y(x)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int^x Y(t)^{-1}b(t)\,dt = \int^x \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt = \int^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^x + x e^x \\ c_2 e^{-x} + x e^{-x} \end{pmatrix}; \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

## 25.3. Reduktionsverfahren von d'Alembert

Gegeben sei das System

$$y'(x) = A(x) \cdot y(x) \tag{25-vi}$$

auf einem Intervall $J$. ($y = (y_1, \ldots, y_n)$, $A = \big(a_{jk}(x)\big)_{j,k=1,\ldots,n}$ )

Im allgemeinen ist es nicht möglich, die Lösungen in geschlossener Form anzugeben. Ist jedoch eine Lösung $\hat{y}$ bekannt, läßt sich das System auf ein System mit $n-1$ Differentialgleichungen zurückführen mittels des Ansatzes

$$y(x) = \varphi(x) \cdot \hat{y}(x) + z(x) \tag{25-vii}$$

mit einer skalaren Funktion $\varphi$ und einer vektorwertigen Funktion

$$z = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Dieses $y$ löst (25-vi) genau dann, wenn

$$z' = Az - \varphi' \cdot \hat{y}$$

In Komponenten ausgeschrieben:

$$0 = \sum_{j=2}^{n} a_{1j} z_j - \varphi' \hat{y}_1 \tag{25-viii}$$

$$\forall k = 2, \dots, n: \quad z_k' = \sum_{j=2}^{n} a_{kj}(x) z_j(x) - \varphi'(x) \hat{y}_k(x) \tag{25-ix}$$

Eliminieren von $\varphi'$ ((25-viii) in (25-ix)) ergibt:

$$z_k' = \sum_{j=2}^{n} \left( a_{kj} - a_{1j} \frac{\hat{y}_k}{\hat{y}_1} \right) z_j \qquad (k = 2, \dots, n) \tag{25-x}$$

also ein homogenes System mit $n - 1$ Gleichungen.

Dabei ist $\hat{y}_1(x) \neq 0$ in $J$ vorausgesetzt (statt der ersten kann man auch eine andere Komponente auszeichnen: $z_l \equiv 0$, $\hat{y}_j \neq 0$ in $J$).

Ist $(z_2, \dots, z_n)$ eine Lösung von (25-x), dann erhält man aus (25-viii)

$$\varphi(x) = \int \frac{1}{\hat{y}_1} \sum_{j=2}^{n} a_{1j} z_j \, dx$$

und daraus eine Lösung von (25-vi) gemäß (25-vii).

Hat man ein Fundamentalsystem $Z(x) = \left(z^{(2)}, \dots, z^{(n)}\right)$ von (25-x), so führt dies auf $n - 1$ Lösungen $y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$ von (25-vi), die zusammen mit $\hat{y}$ ein Fundamentalsystem von (25-vi) bilden.

**Beweis:** der linearen Unabhängigkeit.

Sei für $k = 2, \dots, n:\ y^{(k)} = \varphi_k(x)\hat{y} + z^{(k)}$ und sei

$$\lambda_1 \hat{y} + \lambda_2 y^{(2)} + \dots + \lambda_n y^{(n)} = 0 \in \mathbb{R}^n \tag{25-xi}$$

Für die erste Komponente folgt (wegen $z_1^{(k)} = 0$):

$$\lambda_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_n \varphi_n = 0$$

Mit $\hat{y}$ multipliziert und von (25-xi) subtrahiert ergibt

$$\lambda_2 z^{(2)} + \dots + \lambda_n z^{(n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

□

**Beispiel 25.13.**

$$y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} y(t) = A(t) \cdot y(t)$$

Eine Lösung ist $\hat{y}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$

Ansatz:

$$y = \varphi(t) \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; z'(t) = \left( \frac{2}{t} - (-1) \frac{-t}{t^2} \right) z(t) = \frac{1}{t} \cdot z(t)$$

Eine Lösung ist $z(t) = t$.

$$\Rightarrow \; \varphi(t) = \int \frac{-1}{t^2} \cdot t \, dt = -\log t$$

wenn wir $J = (0, \infty)$ zugrunde legen.

$$\Rightarrow \; y(t) = -\log t \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \log t \\ t(\log t + 1) \end{pmatrix}$$

ist eine zweite Lösung des ursprünglichen Systems.

$\Rightarrow$ ein Fundamentalsystem ist

$$Y(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \log t \\ -t & t(\log t + 1) \end{pmatrix}$$

**Bemerkung 25.14.** Reduktionsverfahren für

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = 0$$

geht mit dem Ansatz $y(t) = \hat{y}(t) \cdot z(t)$.

# 26. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wir betrachten eine lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{26-i}$$

mit gegebenen $a_0, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$, $b : I \to \mathbb{R}$, alle stetig. ($I$ Intervall)

Gesucht ist also eine $n$-mal differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, so dass

$$\forall x \in I \quad y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = b(x)$$

Setze

$$z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \qquad \text{also } z : I \to \mathbb{R}$$

Dann ist (26-i) äquivalent zu

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Aus Abschnitt 25 erhalten wir daher:

**Satz 26.1.**

(1) Sei $x_0 \in I$; seien $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ vorgegeben.

Das Anfangswertproblem

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y(x) = b(x)$$

$$\underbrace{y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \cdots\ , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}}_{\Leftrightarrow\ z(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}$$

hat *genau eine Lösung* auf $I$.

(2) Die Lösungen der homogenen Gleichung ($b \equiv 0$) bilden einen $n$-dimensionalen reellen Vektorraum $V$.

**Definition 26.2.** Sind $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ Lösungen der homogenen Gleichung und sind $y_1, \dots, y_n$ linear unabhängig in $V$, so nennt man $y_1, \dots, y_n$ wieder ein *Fundamentalsystem* der Differentialgleichung.

**Satz 26.3.** Ist $y_1, \dots, y_n$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und ist $y_p$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung, so hat jede Lösung der inhomogenen Gleichung die Form

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_p \quad \text{mit} \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

Wir spezialisieren jetzt:

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ seien *konstant*

Die Differentialgleichung heißt dann *lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.*

Wie bei obiger Transformation sei nun

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Durch Entwicklung nach der letzten Zeile erhält man

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I) = (-1)^n \left[\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0\right]$$

(charakteristisches Polynom der Differentialgleichung $n$-ter Ordnung)

Aus 25.10 erhalten wir folgende Methode zur Bestimmung eines Fundamentalsystems:

(1) Bestimme die *verschiedenen* Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ von $p(\lambda)$ und deren Vielfachheiten.

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

Dabei seien

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}; \qquad \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

$$\lambda_{m+1} = \mu_1, \dots, \lambda_{m+s} = \mu_s$$
$$\lambda_{m+1+s} = \overline{\mu_1}, \dots, \lambda_{m+2s} = \overline{\mu_s} \qquad (m + 2s = r)$$

(2) Sei $j \in \{1, \dots, m\}$. Dann sind

$$e^{\lambda_j x},\ xe^{\lambda_j x},\ x^2 e^{\lambda_j x}, \dots,\ x^{k_j - 1} e^{\lambda_j x}$$

$k_j$ Beiträge zum Fundamentalsystem

(3) Sei $j \in \{m+1, \dots, m+s\}$, $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $(\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R},\ \beta_j \neq 0)$

Dann sind

$$e^{\alpha_j x}\cos(\beta_j x),\ xe^{\alpha_j x}\cos(\beta_j x),\ \dots,\ x^{k_j-1}e^{\alpha_j x}\cos(\beta_j x)$$
$$e^{\alpha_j x}\sin(\beta_j x),\ xe^{\alpha_j x}\sin(\beta_j x),\ \dots,\ x^{k_j-1}e^{\alpha_j x}\sin(\beta_j x)$$

$2k_j$ Beiträge zum Fundamentalsystem.

(4) Führt man (2) für $j = 1, \dots, m$ und (3) für $j = m+1, \dots, m+s$ durch, so erhält man insgesamt ein Fundamentalsystem.

**Beispiel 26.4.** $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + 8y' + 16y = 0$

charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-1)^n \big(\lambda^5 + 4\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 16\big) \\ &= (-1)^n (\lambda+2)^3 \big[\lambda - (1-i)\big] \cdot \big[\lambda - (1+i)\big] \end{aligned}$$

$\lambda_1 = -2$, $k_1 = 3$

$$\Rightarrow \; y_1(x) = e^{-2x}, \quad y_2(x) = xe^{-2x}, \quad y_3(x) = x^2 e^{-2x}$$

$\lambda_2 = 1 - i$, $k_2 = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \; \tilde{y}_4(x) &= e^x \cos(-x) &&= e^x \cos x \\ \tilde{y}_5(x) &= e^x \sin(-x) &&= -e^x \sin x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; y_4(x) = e^x \cos x, \quad y_5(x) = e^x \sin x$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$y(x) = e^{-2x} \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) + e^x \left(c_4 \cos x + c_5 \sin x\right) \quad \text{mit} \quad c_1, \dots, c_5 \in \mathbb{R}$$

Um eine *spezielle Lösung* $y_p$ *der inhomogenen Gleichung* zu erhalten, kann man immer mit Variation der Konstanten zum Ziel kommen:

Ist $y_1, \dots, y_n$ ein Fundamentalsystem der Gleichung $n$-ter Ordnung, so ist ein Fundamentalsystem des äquivalenten Systems 1. Ordnung gegeben durch

$$z^{(j)} = \begin{pmatrix} y_j \\ y_j' \\ y_j'' \\ \vdots \\ y_j^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n$$

also eine Fundamentalmatrix $Z$ durch

$$Z(x) = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} (x)$$

$\Rightarrow$ Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung beim System 1. Ordnung:

$$y_p(x) = Z(x) \int^x Z(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} dt$$

Die *1. Komponente von* $z_p$ ist dann eine spezielle Lösung $y_p$ der inhomogenen skalaren Gleichung $n$-ter Ordnung.

## 26.1. Differentialgleichungen mit speziellen Inhomogenitäten

Für spezielle Inhomogenitäten $b(x)$, nämlich

$$b(x) = q(x) \cdot e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und einem Polynom $q$ vom Grad $k$, kann man mit folgendem *Ansatz* für eine spezielle Lösung $y_p$ *einfacher* zum Ziel kommen:[1]

$$y_p(x) = \begin{cases} \big(\hat{q}(x)\cos(\beta x) + \tilde{q}(x)\sin(\beta x)\big)e^{\alpha x} & \text{falls } p(\alpha + i\beta) \neq 0 \\ x^\nu \big(\hat{q}(x)\cos(\beta x) + \tilde{q}(x)\sin(\beta x)\big)e^{\alpha x} & \text{falls } \alpha + i\beta \text{ eine } \nu\text{-fache Nullstelle von } p \text{ ist} \end{cases}$$

Dabei sind $\hat{q}$ und $\tilde{q}$ anzusetzen als Polynome vom Grad $k$.

**Beispiel 26.5.**

(1) $y''' - y' = x - 1$

1. homogene Gleichung: charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = -(\lambda^3 - \lambda) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$

   $\Rightarrow$ Fundamentalsystem: $\big(e^{0x}\big) = 1, \quad e^x, \quad e^{-x}$

2. inhomogene Gleichung: $b(x) = x - 1$ (von obiger Form mit $q(x) = x - 1$, $\alpha = \beta = 0$)

   $\Rightarrow$ Ansatz mit Polynomen $\hat{q}$, $\tilde{q}$ vom Grad 1:

   $$y_p(x) = x^1\big(\hat{q}(x)\cos(0x) + \tilde{q}(x)\sin(0x)\big)e^{0x}$$

   ($x^1$, da $0 + i0$ *einfache* Nullstelle von $p(\lambda)$)

   d.h. $y_p(x) = x(ax + b)$.

   $$\begin{aligned} \Rightarrow\ y_p'(x) &= 2ax + b \\ y_p''(x) &= 2a \\ y_p'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

   $$\Rightarrow\ y_p'''(x) - y_p'(x) = -2ax - b \overset{!}{=} x - 1$$

   $$\Rightarrow\ a = -\tfrac{1}{2}, \quad b = 1$$

   $$\Rightarrow\ y_p(x) = x - \frac{1}{2}x^2$$

   $\Rightarrow$ allgemeine Lösung von $y''' - y' = x - 1$:

   $$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x - \frac{1}{2}x^2$$

(2) $y'' + 4y' = \cos(2x)$

1. homogene Gleichung: charakteristisches Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda + 4)$

   $\Rightarrow$ Fundamentalsystem: $1,\ e^{-4x}$

[1] Die folgenden Aussagen gelten analog auch für $b(x) = q(x) \cdot e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

2. inhomogene Gleichung: ($q \equiv 1,\ \alpha = 0,\ \beta = 2$)

   $\Rightarrow \alpha + i\beta = 2i$ keine Nullstelle von $p$.

   $\Rightarrow$ Ansatz:

   $$y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$$

   $$\Rightarrow \begin{aligned} y_p'(x) &= -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x) \\ y_p''(x) &= -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x) \end{aligned}$$

   $$\Rightarrow y_p''(x) + 4y_p'(x) = (-4a+8b)\cos(2x) + (-4b-8a)\sin(2x) \stackrel{!}{=} \cos(2x)$$

   $$\Leftrightarrow -4a + 8b \stackrel{!}{=} 1, \quad -4b - 8a \stackrel{!}{=} 0$$

   $$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{20}, \quad b = \frac{1}{10}$$

   $$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{20}\cdot\cos(2x) + \frac{1}{10}\cdot\sin(2x)$$

   $\Rightarrow$ allgemeine Lösung von $y'' + 4y = \cos(2x)$:

   $$y(x) = c_1 + c_2 e^{-4x} - \frac{1}{20}\cdot\cos(2x) + \frac{1}{10}\cdot\sin(2x)$$

## 26.2. EULERsche Differentialgleichungen

Die EULERsche Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung mit *nicht-konstanten* Koeffizienten, bei der man dennoch ein Fundamentalsystem geschlossen angeben kann:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

d.h. die „alten“ $a_j(x)$ sind jetzt gegeben als $a_j \cdot x^j$ (mit „neuen“ Konstanten $a_0, \ldots, a_n,\ a_n \neq 0$).

Wenn $y(x)$ eine Lösung ist, dann auch $y(-x)$. (Nachrechnen)

$\Rightarrow$ Betrachte nur *positive* $x$.

*Substitution:* $x = e^t$; d.h. setze $u(t) := y(e^t)$

Dann:

$$\begin{aligned} u'(t) &= y'(e^t)e^t & &= xy'(x) \\ u''(t) &= y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t & &= x^2y''(x) + xy'(x) \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

Dies führt auf eine lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten für $u$.

**Beispiel 26.6.** $x^2y'' - 3xy' + 7y = 0$

$$\begin{aligned} u(t) &= y\left(e^t\right) &&= y(x) \\ u'(t) &= y'(e^t)e^t &&= xy'(x) \\ u''(t) &= y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t &&= x^2y''(x) + xy'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2y'' - 3xy' + 7y \\ &= (x^2y'' + xy') - 4xy' + 7y \\ &= u''(t) - 4u'(t) + 7u(t) \end{aligned}$$

Charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 7$$

Nullstellen: $2 \pm i\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= e^{2t}\cos\left(\sqrt{3}\cdot t\right) \\ u_2(t) &= e^{2t}\sin\left(\sqrt{3}\cdot t\right) \end{aligned}$$

Jetzt Transformation $x = e^t$, $u(t) = y(e^t)$ rückgängig machen:

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^2\cos\left(\sqrt{3}\cdot \log x\right) \\ y_2(t) &= x^2\sin\left(\sqrt{3}\cdot \log x\right) \end{aligned}$$

## 26.3. Weitere Spezialfälle

Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form

$$F(y, y', y'') = 0$$

auf einem Intervall $J$, in der die Variable $x$ nicht explizit auftaucht.

Falls es eine nicht-konstante Lösung $y$ gibt, dann gibt es in $J$ eine Stelle $x_1$ mit $y'(x_1) \neq 0$. Zumindest in einer Umgebung von $x_1$ ist dann $y$ umkehrbar. Man führt die neue Funktion

$$p(y) = y'\big(x(y)\big)$$

ein, wobei $x(y)$ diese Umkehrfunktion ist. Es gilt dann:

$$p'(y) = y''\big(x(y)\big)\cdot x'(y) = \frac{y''\big(x(y)\big)}{y'\big(x(y)\big)},$$

also

$$p \cdot p' = y''$$

und es ergibt sich die Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(y, p, pp') = 0$$

für $p(y)$.

Ist $p(y)$ eine Lösung, dann erhält man $x(y)$ als Stammfunktion von $\frac{1}{p(y)}$ und daraus $y(x)$ als Umkehrfunktion (eventuell nicht explizit):

$$p(y) = y'\big(x(y)\big) = \frac{1}{x'(y)} \quad \Rightarrow \quad x(y) = \int \frac{1}{p(y)}\, dy$$

Anfangsbedingungen transformieren sich folgendermaßen:

$$\underbrace{y(x_0) = y_0}_{x(y_0)=x_0}, \quad y'(x_0) = y_1 \quad \rightsquigarrow \quad p(y_0) = y'\big(x(y_0)\big) = y_1$$

*Spezialfall:*

$$y'' = f(y)$$

Es sei $F$ eine Stammfunktion von $f$. Man kann diese Differentialgleichung mit der sogenannten *„Energie-Methode“* lösen:

$$\begin{aligned} y'' = f(y) \quad &\Rightarrow \quad 2y'y'' = 2y'f(y) \\ &\Leftrightarrow \quad \big((y')^2\big)' = 2\frac{d}{dx}F\big(y(x)\big) \\ &\Leftrightarrow \quad (y')^2 = 2F(y) + a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; y' = \pm\sqrt{2F(x) + a},$$

wobei das Vorzeichen und der Wert von $a$ durch Anfangsbedingungen festgelegt werden.

Warum „Energie-Methode“?

Sei $F$ ein Kraftfeld, das einem Potential entspringt:

$$-\nabla V(x) = F(x)$$

Bewegungsgleichungen (Newton): $m\ddot{x}(t) = F\big(x(t)\big) = -\nabla V\big(x(t)\big)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \; 2m \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} = -2\dot{x} \cdot \nabla V(x) \\ &\Leftrightarrow \; m\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2\right) = -2\frac{d}{dt}V\big(x(t)\big) \\ &\Leftrightarrow \; m\dot{x}^2 = -2V\big(x(t)\big) + 2E \\ &\Leftrightarrow \; E = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{x}^2}_{\text{kin. Energie}} + \underbrace{V(x)}_{\text{pot. Energie}} = \text{konstant} \end{aligned}$$

**Beispiel 26.7.**

(1) $y'' = y'^2 \cdot \sin y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1 \rightsquigarrow x(0) = 0$, $p(0) = y'(0) = 1$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \; p \cdot p' = p^2 \sin y \\ &\log p(y) - \log p(0) = \int\limits_0^y \sin\eta \, d\eta \\ &\Leftrightarrow \; p(y) = e^{1-\cos y} = y'(x) = \frac{1}{x'(y)} \\ &\Rightarrow \; x(y) - x(0) = \int\limits_0^y e^{\cos\eta - 1}\, d\eta \end{aligned}$$

(2) $(y')^2 = 2 \cdot y \cdot y''$, $p = y'$, $y'' = p \cdot p'$

$$\Rightarrow\ p^2 = 2y \cdot pp'$$

Falls $p \not\equiv 0$ ($y = c =$ konst. ist eine Lösung),:

$$\Rightarrow\ 2\frac{p'}{p} = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \log p^2 = \log(y \cdot c)$$

$$\Rightarrow\ p(y)^2 = c \cdot y \quad \Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{c \cdot y}$$

$$\Rightarrow\ \pm\tfrac{2}{c} \cdot \sqrt{cy} = x + b$$

$$\Rightarrow\ y(x) = \tfrac{c}{4}(x+b)^2 = a(x+b)^2$$

Weitere Lösungen der Differentialgleichung: $y(x) = c$.

(3) $y'' = \frac{(y')^2 + y'}{y}$, $y' = p$, $y'' = p \cdot p'$

$$\Rightarrow\ pp' = \frac{p(p+1)}{y}$$

$$\Rightarrow\ \frac{p'}{p+1} = \frac{1}{y}, \qquad (y = c \neq 0 \text{ ist eine Lösung})$$

$$\Leftrightarrow\ \log|p+1| = \log|\tilde{c}y| \quad \Rightarrow \quad p + 1 = cy$$

$$\Rightarrow\ y' = cy - 1 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{c}\log|cy-1| = x + \tilde{b}$$

$$\Rightarrow\ cy - 1 = be^{cx}$$

$$\Rightarrow\ y(x) = \tfrac{1}{c}\left(1 + be^{cx}\right), \quad c \neq 0,\ b \in \mathbb{R}$$

(4) $y'' = 2(y^3 + y)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

$$\Rightarrow\ 2y' \cdot y'' = \left((y')^2\right)' = 4y' \cdot (y^3 + y) = (y^4 + 2y^2)'$$

$$\Rightarrow\ (y')^2 = y^4 + 2y^2 + y'(0)^2 = (y^2+1)^2$$

$$\Rightarrow\ y' = \pm(y^2 + 1)$$

$$\Rightarrow\ y(x) = \tan(x + b)$$

$$y(0) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad b = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$\Rightarrow$ Lösung $y(x) = \tan x$.

# 27. Die Fourier–Transformation

**Definition 27.1.**

(1) $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise stetig* auf $[a,b]$, wenn gilt: Es existiert eine Zerlegung $\{t_0,\dots,t_m\}$ von $[a,b]$ mit: $g$ ist auf *jedem* Teilintervall $(t_{j-1},\ t_j)$ $(j = 1,\dots,m)$ stetig und es existieren die *ein*seitigen Grenzwerte

$$g\,(t_j+) = \lim_{t\to t_j+0} g(t), \quad g\,(t_j-) = \lim_{t\to t_j-0} g(t), \quad g(a+),\ g(b-)$$

(2) *$g$ stückweise glatt*

$$:\Leftrightarrow\ \exists \text{ Zerlegung } z = \{t_0,\dots,t_m\}\ \forall j \in \{1,\dots,m\} \quad g \textit{ stetig differenzierbar} \text{ auf } (t_{j-1},\ t_j)$$

und es existieren die einseitigen Grenzwerte

$$g(t_j+), \quad g(t_j-), \quad g'(t_j+), \quad g'(t_j-)$$

$$g(a+), \quad g(b-), \quad g'(a+), \quad g'(b-)$$

(Siehe 16.6.)

*Klar:* $g$ stückweise glatt, so muss $g$ in den Punkten $t_j$ $(j = 1,\dots,m-1)$ nicht stetig, also auch erst recht nicht differenzierbar sein.

(3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise* $\left|\begin{array}{c}\textit{stetig}\\ \textit{glatt}\end{array}\right|$, wenn $h$ auf *jedem* kompakten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ stückweise $\left|\begin{array}{c}\text{stetig}\\ \text{glatt}\end{array}\right|$ ist.

(4) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise glatt und $x_0 \in \mathbb{R}$ (dann existieren $h'(x_0-)$ und $h'(x_0+)$)

*Definiere:*

$$h'(x_0) := \tfrac{1}{2}\big(h'(x_0-) + h'(x_0+)\big) \tag{27-i}$$

(Falls $h$ in $x_0$ differenzierbar, so stimmt (27-i) mit der Ableitung von $h$ in $x_0$ überein.)

(5) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; setze $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$ (also $f = u + iv$; $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

(i)

$$f \text{ heißt stückweise } \left|\begin{array}{c}\text{stetig}\\ \text{glatt}\end{array}\right| :\Leftrightarrow u \text{ und } v \text{ stückweise } \left|\begin{array}{c}\text{stetig}\\ \text{glatt}\end{array}\right|$$

Ist $f$ stückweise glatt und $x_0 \in \mathbb{R}$, so setze

$$f'(x_0) := u'(x_0) + iv'(x_0),$$

wobei $u'(x_0)$, $v'(x_0)$ gemäß (27-i) definiert sind.

(ii) Ist $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und gilt $u, v \in R[a,b]$, so sagen wir, dass $f$ (RIEMANN–) integrierbar über $[a,b]$ ist und setzen

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx$$

(iii) Sind

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} v(x)\,dx$$

beide $\left|\begin{array}{l}\text{konvergent}\\ \text{absolut konvergent}\end{array}\right|$, so sagen wir, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ $\left|\begin{array}{l}\text{konvergent}\\ \text{absolut konvergent}\end{array}\right|$ ist, und setzen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\,dx$$

Ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ absolut konvergent, so heißt $f$ *absolut integrierbar* (aib) über $\mathbb{R}$.

Entsprechende Definition für die anderen Typen uneigentlicher Integrale.

**Bemerkung 27.2.**

(1) Sei $f = u + iv : [a,b] \to \mathbb{C}$, $u, v \in R[a,b]$. Weiter seien $U, V : [a,b]$ Stammfunktionen zu $u$ bzw. $v$ auf $[a,b]$ und $F := U + iV : [a,b] \to \mathbb{C}$.

Dann gilt

$$F' = U' + iV' = u + iv = f$$

Nenne also $F$ auch *Stammfunktion* zu $f$.

(2) Ferner:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt\\ &= U(b) - U(a) + i\big[V(b) - V(a)\big]\\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

**Beispiel 27.3.** Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \notin 0$, $f(t) := e^{z_0 t}$

$$F(t) := \frac{1}{z_0} e^{z_0 t}$$

Dann (Nachrechnen!):

$$F'(t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

also:

$$\int_a^b e^{z_0 t}\,dt = \frac{1}{z_0}\left(e^{z_0 b} - e^{z_0 a}\right)$$

**Lemma 27.4.**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ ist absolut integrierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx \text{ ist konvergent}$$

In diesem Fall ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ konvergent, und

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx \right| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx$$

Entsprechendes gilt für die anderen Typen uneigentlicher Integrale.

**Beweis:** Sei $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$.

Nach 17.3:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |u(x)|,\ |v(x)| \leq |f(x)| \leq |u(x)| + |v(x)| \tag{27-ii}$$

Sei $f$ absolut integrierbar $\Rightarrow u, v$ absolut integrierbar

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x)|\ dx,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |v(x)|\ dx < \infty$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(|u(x)| + |v(x)|\big)\ dx < \infty$$

Aus dem Majorantenkriterium und (27-ii) folgt:

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx < \infty$$

Sei $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx$ konvergent. Dann folgt aus dem Majorantenkriterium und (27-ii):

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x)|\ dx,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |v(x)|\ dx < \infty$$

$\Rightarrow f$ ist absolut integrierbar.

Zur Dreiecksungleichung:

Sei $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx =: re^{i\varphi}$ mit $r \in (0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

Setze $c := e^{-i\varphi}$, also

$$c \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = r$$

$$\Rightarrow \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right| = r = c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \mathrm{Re}\left[c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}[cf(x)]\,dx = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}[cf(x)]\,dx\right|$$
$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left|\mathrm{Re}[cf(x)]\right|}_{\leq|cf(x)|=|f(x)|}\,dx$$

□

**Satz 27.5** (Vergleichskriterium)**.** Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar und gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq |g(x)|,$$

so ist $f$ absolut integrierbar. (Entsprechend für andere Typen uneigentlicher Integrale)

**Beweis:** Majorantenkriterium, 27.4 □

## 27.1. Die FOURIER-Transformierte

**Definition 27.6.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *stückweise stetig* und *absolut integrierbar*. Sei $s \in \mathbb{R}$ und

$$g_s(t) := f(t)e^{-ist}$$

(dann: $g$ stückweise stetig und $g$ absolut integrierbar, da $|e^{-ist}| = 1$ und 27.5)

Setze

$$\boxed{\hat{f}(s) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}\,dt} \tag{27-iii}$$

Dieses definiert eine Funktion $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

$\hat{f}$ heißt FOURIER–*Transformierte* von $f$.

**Satz 27.7.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar.

Dann ist $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *stetig*.

(ohne Beweis)

**Beispiel 27.8.**

(1) $f(t) := e^{-|t|}$ (ist stückweise stetig und absolut integrierbar)

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \cdot e^{-ist}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{0} e^{t} \cdot e^{-ist}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-ist}\, dt \right]\end{aligned}$$

Es ist

$$\int_{c}^{0} e^{t} e^{-ist}\, dt = \int_{c}^{0} e^{(1-is)t}\, dt = \frac{1}{1-is} \cdot e^{(1-is)t} \Big|_{t=c}^{t=0} = \frac{1}{1-is}\Big(1 - \underbrace{e^{(1-is)c}}_{e^{c}e^{-isc}}\Big) \xrightarrow{c \to -\infty} \frac{1}{1-is}$$

Analog:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-ist}\, dt = \frac{1}{1+is}$$

$$\Rightarrow\ \hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-is} + \frac{1}{1+is}\right] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+s^2}$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \le 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

$s = 0$:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i \cdot 0 \cdot t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} 1\, dt = \frac{1}{\pi}$$

$s \neq 0$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} e^{-ist}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-is}\left(e^{-is} - e^{is}\right)\right] \\ &= \frac{1}{s\pi} \cdot \underbrace{\frac{e^{is} - e^{-is}}{2i}}_{=\sin(s)} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin(s)}{s}\end{aligned}$$

## 27.2. CAUCHYscher Hauptwert

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ war $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ definiert als

$$\lim_{d \to -\infty} \int_{d}^{0} f(x)\, dx + \lim_{c \to \infty} \int_{0}^{c} f(x)\, dx,$$

falls beide Grenzwerte existieren, und *nicht* als

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$$

**Beispiel 27.9.** $f(x) := x$, dann

$$\int\limits_{d}^{0} f(x)\,dx \xrightarrow{d\to-\infty} -\infty$$

$$\int\limits_{0}^{c} f(x)\,dx \xrightarrow{c\to+\infty} +\infty$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx \textit{ nicht } \text{konvergent, aber}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\underbrace{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} x\,dx}_{=0} = 0$$

**Definition 27.10.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben. Falls

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$$

existiert, so heißt er der CAUCHY*sche Hauptwert* (CH) und man schreibt

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx =: \mathrm{CH}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

**Beispiel 27.11.** $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ ist divergent, aber

$$\mathrm{CH}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx = 0$$

## 27.3. Umkehrung stückweise glatter Funktionen

**Satz 27.12** (Umkehrsatz für stückweise glatte Funktionen)**.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei stückweise glatt und absolut integrierbar.

Dann gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \mathrm{CH}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{ixs}\,ds$$

Ist also $f$ stetig in $x$, so gilt

$$f(x) = \mathrm{CH} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{ixs}\, dx$$

Ist außerdem $\hat{f}$ absolut integrierbar, so gilt

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{ixs}\, ds$$

(Formel der selben Bauart wie (27-iii).)

(ohne Beweis)

Das folgende Beispiel zeigt, dass im Allgemeinen der CAUCHYsche Hauptwert in obiger Transformation *nicht* durch das uneigentliche Integral ersetzt werden kann.

**Beispiel 27.13.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases} \qquad \left( \Rightarrow \hat{f}(s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & s = 0 \\ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin s}{s} & s \neq 0 \end{cases} \right)$$

$$\hat{f}(s) e^{is} = \frac{1}{\pi} \cdot \begin{cases} (\cos s + i \sin s) \cdot \frac{\sin s}{s} & \text{für } s \neq 0 \\ 1 & \text{für } s = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{is}\, dx \text{ ist } \textit{nicht} \text{ konvergent}$$

Aber:

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{f}(s) e^{is}\, ds &= \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\cos s \cdot \sin s}{s}\, ds + i \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sin^2 s}{s}\, ds}_{=0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sin(2s)}{s}\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\alpha}^{2\alpha} \frac{\sin u}{u}\, du \end{aligned} \tag{27-iv}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ 1 = f(0) &\underset{27.12}{=} \lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{f}(s) e^{i \cdot 0 \cdot s}\, ds \\ &= \lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{f}(s)\, ds = \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sin s}{s}\, ds \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{\alpha \to \infty} \int_{0}^{\alpha} \frac{\sin s}{s}\, ds \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin s}{s}\, ds = \frac{\pi}{2} \qquad \text{(vgl. 14.15)}$$

$$\underset{(27\text{-iv})}{\Rightarrow} \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{f}(s)e^{is}\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\alpha}^{2\alpha} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_0^{2\alpha} \frac{\sin u}{u}\, du \xrightarrow{\alpha\to\infty} \frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{CH}\int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{f}(s)e^{is}\, ds = \frac{1}{2}$$

Da auch $\frac{1}{2}\big(f(1+)+f(1-)\big) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$, ist dies konsistent mit Satz 27.12.

**Satz 27.14.** $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ seien stückweise glatt und absolut integrierbar. *Falls* $\hat{f}_1 \equiv \hat{f}_2$, so gilt

$f_1(x) = f_2(x)$ in allen Punkten $x$, in denen $f_1$ und $f_2$ beide stetig sind.

**Beweis:** Sei $x$ ein solcher Punkt.

$$\Rightarrow f_1(x) \underset{27.12}{=} \text{CH}\int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{f}_1(s)e^{ixs}\, ds = \text{CH}\int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{f}_2(s)e^{ixs}\, ds \underset{27.12}{=} f_2(x)$$

□

**Satz 27.15.** $f_1, f_2 : \mathbb{R}\,(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ seien stückweise stetig und absolut integrierbar, ferner $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(\widehat{\alpha f_1 + \beta f_2}) = \alpha\hat{f}_1 + \beta\hat{f}_2,$$

d.h. die Zuordnung $f \mapsto \hat{f}$ ist *linear*.

**Beweis:** trivial (Linearität des Integrals) □

**Satz 27.16.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei stückweise stetig und absolut integrierbar. Für $h \in \mathbb{R}$ fest setze

$$f_h(x) := f(x+h) \quad (\text{für } x \in \mathbb{R})$$

Dann gilt:

$$\hat{f}_h(s) = e^{ish}\cdot\hat{f}(s) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}$$

**Beweis:**

$$\hat{f}_h(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_h(t)}_{=f(t+h)}\, e^{-ist}\, dt$$

Sei $c > 0$:

$$\int_0^c f(t+h)e^{-ist}\, dt$$

Substituiere $\tau = t + h$, $d\tau = dt$

$$= \int\limits_h^{c+h} f(\tau)e^{-is(\tau-h)}\,d\tau = e^{ish}\int\limits_h^{c+h} f(\tau)e^{is\tau}\,d\tau$$

Sei $d < 0$:

$$\int\limits_d^0 f(t+h)e^{-ist}\,dt$$

wie oben:

$$= e^{ish}\int\limits_{d+h}^{h} f(\tau)e^{-is\tau}\,d\tau$$

$$\Rightarrow \int\limits_d^0 f(t+h)e^{-ist}\,dt + \int\limits_0^c f(t+h)e^{-ist}\,dt = e^{ist}\underbrace{\int\limits_{d+h}^{c+h} f(\tau)e^{-is\tau}\,d\tau}_{\to\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-is\tau}}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \hat{f}_h(s) &= \frac{1}{2\pi}\left[\lim_{d\to-\infty}\int\limits_d^0 f(t+h)e^{-ist}\,dt + \lim_{c\to\infty}\int\limits_0^c f(t+h)e^{-ist}\,dt\right] \\ &= e^{ish}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-is\tau}\,d\tau}_{=\hat{f}(s)}\end{aligned}$$

□

## 27.4. Faltungen

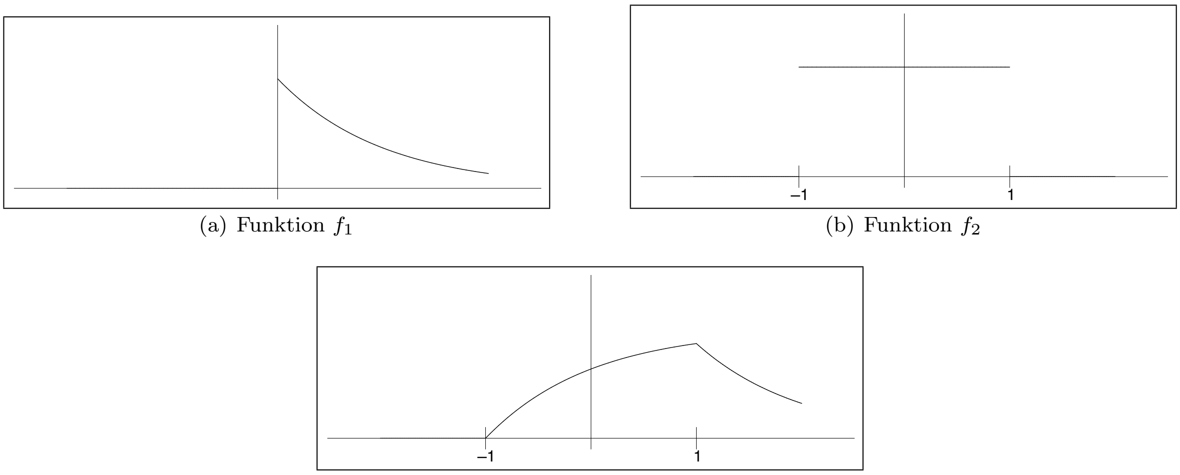
**Definition 27.17.** Es seien $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ so, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t-x)f_2(x)\,dx$$

konvergiert. Dann heißt die Funktion $f_1 * f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\big(f_1 * f_2\big)(t) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t-x)f_2(x)\,dx$$

die *Faltung von $f_1$ und $f_2$.*




(a) Funktion $f_1$ (b) Funktion $f_2$

(c) Faltung $f_1 * f_2$

Abbildung 27.1.: Funktionen aus Beispiel 27.18

**Beispiel 27.18.** Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(t) := \begin{cases} e^{-t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad f_2(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1 \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$\big(f_1 * f_2\big)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-x) f_2(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} f_1(t-x)\, dx \overset{\substack{y=t-x \\ dy=-dx}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{t-1}^{t+1} f_1(y)\, dy$$

1. Fall: $t < -1$; dann ist $t+1 < 0$ und somit $\big(f_1 * f_2\big)(t) = 0$

2. Fall: $-1 \leq t < 1$; dann

$$\big(f_1 * f_2\big)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{t+1} e^{-y}\, dy = \frac{1}{2\pi} \Big(1 - e^{-(t+1)}\Big)$$

3. Fall: $t \geq 1$; dann

$$\big(f_1 * f_2\big)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{t-1}^{t+1} e^{-y}\, dy = \frac{1}{2\pi} \left(e^{-t} \left(e - \frac{1}{e}\right)\right)$$

insgesamt also

$$\big(f_1 * f_2\big)(t) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} 0 & \text{für } t < -1 \\ 1 - e^{-(t+1)} & \text{für } -1 \leq t < 1 \\ e^{-t}\left(e - \frac{1}{e}\right) & \text{für } t \geq 1 \end{cases}$$

**Satz 27.19.** $f_1, f_2$ seien *stetig* und absolut integrierbar. Weiter sei $f_1$ auf $\mathbb{R}$ *beschränkt*.

Dann:

(1)

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t-x) f_2(x)\, dx \text{ absolut konvergent}$$

(2)

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \big|(f_1 * f_2)(t)\big| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} \big|f_1(x)\big| \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|f_2(x)\big|\, dx$$

(3) $f_1 * f_2$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ und absolut integrierbar.

(4)

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R} \quad \big(\widehat{f_1 * f_2}\big)(s) = \hat{f}_1(s) \cdot \hat{f}_2(s)}$$

(ohne Beweis)

**Satz 27.20.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und stückweise glatt. Weiter seien $f$ und $f'$ absolut integrierbar (beachte: $f'$ ist gemäß Definition 27.1 überall definiert.)

Dann gilt:

(1)

$$\boxed{\widehat{(f')}(s) = is \cdot \hat{f}(s)} \text{ für alle } s \in \mathbb{R}$$

(2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

**Beweis:** Zeige zunächst die Hilfsaussage (2), dies aber nur für $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Es ist zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c > 0\ \forall x > c \quad |f(x)| < \varepsilon$$

*Annahme:* dies sei falsch. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ derart dass

$$\forall c > 0\ \exists x_c > 0 \quad \big|f(x_c)\big| \geq \varepsilon \tag{27-v}$$

Da $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\, dx$ konvergent, existiert ein $x_0 > 0$ mit

(i)

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \big|f'(x)\big|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

(ii) nach (27-v): $|f(x_0)| \geq \varepsilon$

Sei $x > x_0$; dann

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| \;=\; \left|\int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,dt\right| \;\leq\; \int\limits_{x_0}^{x} \left|f'(t)\right|\,dt \;\leq\; \int\limits_{x_0}^{\infty} \left|f'(t)\right|\,dt \;<\; \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow\; \left|f(x)\right| \;\geq\; \left|f(x_0)\right| - \frac{\varepsilon}{2} \;>\; \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow\; \int\limits_{x_0}^{x} \left|f(t)\right|\,dt \;>\; \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon}{2}\,dt \;=\; \frac{\varepsilon}{2}(x - x_0) \;\xrightarrow{x\to\infty}\; \infty$$

$\Rightarrow$ Widerspruch zu: $f$ absolut integrierbar.

zu (1):

Sei $c > 0$. Seien $x_1, \ldots, x_k \in (0,c)$ die Unstetigkeitsstellen von $f'$ im Intervall $(0,c)$. $t := 0$, $t_{k+1} := c$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; \int\limits_0^c f'(t)e^{-ist}\,dt &= \sum_{j=0}^{k} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f'(t)e^{-ist}\,dt \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left[ f(t)e^{-ist}\Big|_{t=x_j}^{t=x_{j+1}} + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f'(t)(is)e^{-ist}\,dt \right] \\
&= \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \left[f(x_{j+1}-)e^{-isx_{j+1}} - f(x_j+)e^{-isx_j}\right]}_{=f(c)e^{-isc} + \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\left[f(x_j-)-f(x_j+)\right]}_{=0,\, f \text{ stetig}} e^{-isx_j} - f(0)} + (is)\int\limits_0^c f(t)e^{-ist}\,dt \\
&= (is)\int\limits_0^c f(t)e^{-ist}\,dt + f(c)e^{-isc} - f(0) \\
&\xrightarrow{c\to\infty} (is)\int\limits_0^\infty f(t)e^{-ist}\,dt - f(0), \quad \text{da } f(c) \to 0 \text{ und } \left|e^{-isc}\right| = 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; \int\limits_0^\infty f'(t)e^{-ist}\,dt = (is)\int\limits_0^\infty f(t)e^{-ist}\,dt - f(0)$$

Analog:

$$\int\limits_{-\infty}^0 f'(t)e^{-ist}\,dt = (is)\int\limits_{-\infty}^0 f(t)e^{-ist}\,dt + f(0)$$

Addieren, durch $2\pi$ dividieren:

$$\widehat{f'}(s) = is\hat{f}(s).$$

$\square$

Aus dem Beweis ist ersichtlich:

**Satz 27.21.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei stückweise glatt und $f, f'$ seien absolut integrierbar. $f$ besitze höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

$$\widehat{f'}(s) = (is)\hat{f}(s) + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\big[f(x_j-) - f(x_j+)\big]e^{-isx_j}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(Teil (2) von Satz 27.20 gilt genauso.)

Aus 27.20 ergibt sich rekursiv (durch vollständige Induktion):

**Satz 27.22.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $(n-1)$–mal *stetig* differenzierbar (d.h. $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien $(n-1)$–mal stetig differenzierbar). Weiter existiere $f^{(n)}$ auf $\mathbb{R}$ und sei stückweise stetig (arithmetisches Mittel in den Sprungstellen!); anders formuliert: $f^{(n-1)}$ sei stückweise glatt.

Ferner seien $f, f', \ldots, f^{(n)}$ absolut integrierbar.

Dann gilt:

$$\widehat{f^{(k)}}(s) = (is)^k \hat{f}(s)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$.

# 28. Die LAPLACE–Transformation

**Definition 28.1.** Gegeben sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$.

$$K_f := \left\{ s \in \mathbb{C} : \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \text{ konvergent} \right\}$$

Die Funktion $F : K_f \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

heißt LAPLACE–*Transformierte von* $f$ und wird mit $\mathcal{L}[f]$ bezeichnet.

**Beispiel 28.2.** Sei $a \geq 0$ und

$$h_a(t) := \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & 0 \leq t < a \end{cases}$$

(also $h_0 \equiv 1$)

$h_a$ heißt auch *Heavyside–Funktion*.

Sei $c > a$:

$$\int_0^c e^{-st} h_a(t)\, dt = \int_a^c e^{-st}\, dt \underset{s \neq 0}{=} -\tfrac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t=a}^{t=c} = \tfrac{1}{s} \left( e^{-sa} - e^{-sc} \right)$$

Nun ist (falls $s = \varrho + i\sigma$ mit $\varrho, \sigma \in \mathbb{R}$):

$$e^{-sc} = e^{-(\varrho + i\sigma)c} = e^{-\varrho c} \cdot \underbrace{e^{-i\sigma c}}_{|\cdot|=1} \xrightarrow{c \to \infty} 0 \;\Leftrightarrow\; \varrho > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^c e^{-st} h_a(t)\, dt \xrightarrow{c \to \infty} \frac{1}{s} \cdot e^{-sa}, \text{ falls } \operatorname{Re} s > 0$$

Also $K_f \supseteq \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\}$.

D.h.

$$\mathcal{L}[h_a] = \frac{e^{-sa}}{s}, \quad \text{insbesondere } \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

**Definition 28.3.**

(1) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ heißt stückweise $\left|\begin{array}{c}\text{stetig}\\ \text{glatt}\end{array}\right|$, wenn $f$ in jedem kompakten Teilintervall $[a,b] \subset [0,\infty)$ stückweise $\left|\begin{array}{c}\text{stetig}\\ \text{glatt}\end{array}\right|$ ist.

(2) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ heißt *von exponentieller Ordnung* $\gamma$, falls $\gamma \in \mathbb{R}$ und

$$\exists M > 0\ \forall t \in [0,\infty) \quad |f(t)| \leq M e^{\gamma t}$$

(3) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ heißt *von exponentieller Ordnung*, falls

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} \quad f \text{ ist von exponentieller Ordnung } \gamma$$

**Beispiel 28.4.**

(1) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f(t) = t^n$. Wir wissen, dass für jedes $\gamma > 0$:

$$e^{\gamma t} = 1 + \gamma t + \tfrac{1}{2}(\gamma t)^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}(\gamma t)^n + \cdots \geq \frac{1}{n!}(\gamma t)^n \quad \text{für } t \in [0,\infty)$$

$$\Rightarrow\ |f(t)| = t^n \leq \underbrace{\frac{n!}{\gamma^n}}_{=:M} e^{\gamma t} \quad \text{für } t \in [0,\infty)$$

$$\Rightarrow\ \forall \gamma > 0 \quad f(t) = t^n \text{ ist von exponentieller Ordnung } \gamma$$

$f$ ist aber *nicht* von exponentieller Ordnung 0 (außer wenn $n = 0$), denn

$$|f(t)| \leq M e^{0t} \quad \big(t \in [0,\infty)\big)$$

ist für kein $M$ richtig.

(2) Aus (1) folgt: Jedes Polynom ist von exponentieller Ordnung $\gamma$, für jedes $\gamma > 0$.

(3) Konstante Funktionen $\neq 0$ sind von exponentieller Ordnung 0.

Die Nullfunktion ist von exponentieller Ordnung $\gamma$ für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$.

(4) Jede beschränkte Funktion (z.B. auch die Heavyside–Funktion, die Sinus–Funktion, die Cosinus–Funktion) ist von exponentieller Ordnung 0.

**Satz 28.5.** Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig.

Dann gilt:

(1) Ist $s_0 \in \mathbb{C}$ und $\int_0^\infty e^{-s_0 t} f(t)\,dt$ absolut konvergent, so ist $K_f \supseteq \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0\}$.

Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$ konvergiert $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ sogar *absolut.*

(2) Ist $f$ von exponentieller Ordnung $\gamma$, so gilt:

$$K_f \supseteq \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \gamma\}$$

Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \gamma$ konvergiert $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ sogar *absolut.*

**Beweis:**

zu (1) Sei $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$

$$\begin{aligned}\left|e^{-st} f(t)\right| &= \left|e^{-(\operatorname{Re} s)t}\right| \cdot \underbrace{\left|e^{-i(\operatorname{Im} s)t}\right|}_{=1} \cdot \left|f(t)\right| \\ &= e^{-(\operatorname{Re} s)t} \cdot \left|f(t)\right| \\ &\leq e^{-(\operatorname{Re} s_0)t} \cdot |f(t)| = \left|e^{-s_0 t} \cdot f(t)\right|\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nach Majorantenkriterium ist $\int_0^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| \, dt$ konvergent.

zu (2) Nach Voraussetzung existiert ein $M > 0$ mit $\forall t \geq 0 \;\; |f(t)| \leq M e^{\gamma t}$.

$$\Rightarrow \;\; \left|e^{-st} f(t)\right| = e^{-(\operatorname{Re} s)t} \cdot |f(t)| \leq M e^{-(\operatorname{Re} s - \gamma)t}$$

Da

$$\int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re} s - \gamma)t} \, dt \text{ konvergent} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} s > \gamma,$$

folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

$\square$

**Beispiel 28.6.** Sei $\omega \in \mathbb{R}$, $f(t) := \cos(\omega t)$, $g(t) := \sin(\omega t)$.

Seien $F := \mathcal{L}[f]$, $G := \mathcal{L}[g]$, definiert mindestens auf $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\}$ (da $f, g$ von exponentieller Ordnung 0)

$$\begin{aligned}F(s) + iG(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \cos(\omega t) \, dt + i \int_0^\infty e^{-st} \sin(\omega t) \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \underbrace{\left[\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\right]}_{=e^{i\omega t}} \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{(-s+i\omega)t} \, dt \\ &= \lim_{c \to \infty} \int_0^c e^{(-s+i\omega)t} \, dt = \lim_{c \to \infty} \frac{1}{-s + i\omega} \left[e^{(-s+i\omega)c} - 1\right] \\ &= \frac{1}{s - i\omega},\end{aligned}$$

da $\operatorname{Re} s > 0$ und somit

$$\left|e^{(-s+i\omega)c}\right| = e^{-(\operatorname{Re} s)c} \xrightarrow{c \to \infty} 0$$

Betrachte hilfsweise $\tilde{f}(t) = \cos(-\omega t)$ $(= f(t))$, $\tilde{g}(t) = \sin(-\omega t)$ $(= -g(t))$, $\tilde{F} := \mathcal{L}[\tilde{f}]$, $\tilde{G} := \mathcal{L}[\tilde{f}]$

$\Rightarrow \tilde{F} = F$, $\tilde{G} = -G$

Nach obigem:

$$\tilde{F}(s) + i\tilde{G}(s) = \frac{1}{s - i(-\omega)}, \text{ also}$$

$$F(s) - iG(s) = \frac{1}{s + i\omega}$$

Addiere dies zu $F(s) + iG(s) = \frac{1}{s - i\omega}$:

$$2F(s) = \frac{1}{s + i\omega} + \frac{1}{s - i\omega} = \frac{2s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}}$$

Entsprechend durch Subtraktion:

$$2iG(s) = \frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega} = \frac{2i\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

Also

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}\big[\cos(\omega\ \cdot)\big](s) &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}\big[\sin(\omega\ \cdot)\big](s) &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s - a} \quad \text{für } \operatorname{Re} s > a$$

**Satz 28.7** (Umkehrsatz für die LAPLACE–Transformation)**.** $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei stückweise glatt und

$$\forall t \geq 0 \quad |f(t)| \leq Me^{\gamma t}$$

$$F := \mathcal{L}[f] \text{ für } \operatorname{Re} s > \gamma$$

Dann gilt für jedes $x > \gamma$:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{CH} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + is)e^{(x+is)t}\, ds = \begin{cases} \dfrac{f(t+) + f(t-)}{2} & t > 0 \\ \dfrac{f(0+)}{2} & t = 0 \end{cases}$$

Insbesondere: Ist $f$ in $t \in (0, \infty)$ stetig

$$\Rightarrow\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{CH} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + iy)e^{(x+iy)t}\, dy$$

**Beweis:** Sei $x > \gamma$.

$$g(t) := \begin{cases} e^{-xt}f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$g(t)$ ist stückweise glatt,

$$|g(t)| = \left|e^{-xt}f(t)\right| \leq Me^{-(x-\gamma)t} \quad \forall t \geq 0$$

$\Rightarrow$ (Majorantenkriterium) $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt$ konvergiert.

$\Rightarrow g$ ist absolut integrierbar.

Nach Abschnitt 27:

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-ist}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} f(t)e^{-(x+is)t}\, dt = F(x+is)$$

$$27.12 \Rightarrow \forall t \geq 0 \quad \frac{g(t+)+g(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{CH} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(s)e^{its}\, ds = \mathrm{CH} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(x+is)e^{its}\, ds$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{CH} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x+is)e^{(x+is)t}\, ds \quad \forall t \geq 0$$

$t = 0$: $f(\tau) =$ für $\tau < 0 \Rightarrow f(0-) = 0$

$$\Rightarrow \frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \frac{f(0+)}{2}$$

□

Für diesen Sachverhalt in 28.7 schreibt man symbolisch:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

**Korollar 28.8** (Eindeutigkeitssatz)**.** $f_1, f_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ beide stückweise glatt und von exponentieller Ordnung $\gamma$. $F_1, F_2$ seien die Laplace–Transformierten von $f_1, f_2$.

Gilt $F_1(s) = F_2(s)$ für $\operatorname{Re} s > \gamma$, so gilt in jedem Stetigkeitspunkt von $f_1$ *und* $f_2$:

$$f_1(t) = f_2(t)$$

Insbesondere folgt für stetige $f_1, f_2$: $f_1 = f_2$

**Beweis:** folgt unmittelbar aus 28.7 □

## 28.1. Eigenschaften der Laplace-Transformation

In den folgenden Sätzen seien die vorkommenden Funktion $f, f_1, f_2, \ldots$ stets stückweise stetig auf $\mathbb{R}$ und $= 0$ für $t < 0$.

Außerdem seien sie von exponentieller Ordnung.

**Satz 28.9.** $f_1, f_2$ seien von exponentieller Ordnung $\gamma$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

$$\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha\mathcal{L}[f_1] + \beta\mathcal{L}[f_2]$$

**Beweis:** Nachrechnen. □

**Beispiel 28.10.** $f(t) = \cosh(\omega t)$ für $t \geq 0$ $(\omega > 0)$

$$\Rightarrow \ f(t) = \frac{1}{2}e^{\omega t} + \frac{1}{2}e^{-\omega t}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \ \text{für } \operatorname{Re} s > \omega: \quad \mathcal{L}[\cosh(\omega t)](s) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{\omega t}\right](s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-\omega t}\right](s) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega} + \frac{1}{s+\omega}\right) = \frac{s}{s^2-\omega^2}\end{aligned}$$

**Satz 28.11.** $f$ sei von exponentieller Ordnung $\gamma$ und $F = \mathcal{L}[f]$.

(1)

$$\mathcal{L}\left[e^{\delta t}f(t)\right] = F(s-\delta) \quad \text{für } \operatorname{Re} s > \gamma + \delta,\ \delta \in \mathbb{R}$$

(2) Sei $h_\delta$ die Heavyside-Funktion $(\delta > 0)$

$$g(t) := h_\delta(t) f(t-\delta)$$

$$\Rightarrow \ \mathcal{L}[g] = e^{-\delta s}F(s), \quad \text{für } \operatorname{Re} s > \gamma$$

(3) Sei $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}\big[f(at)\big] = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{für } \operatorname{Re} s > \gamma \cdot a$$

(1), (2) heißen *Verschiebungssätze*, (3) heißt *Streckungssatz*.

**Beweis:** Wir zeigen nur (2). (Der Rest wurde in der Saalübung erbracht.)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g] &= \int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt = \int_\delta^\infty e^{-st}f(t-\delta)\,dt \\ &= \lim_{\eta\to\infty}\int_\delta^\eta e^{-st}f(t-\delta)\,dt = \left\{\begin{matrix}\tau = t-\delta \\ d\tau = dt\end{matrix}\right\} \\ &= \lim_{\eta\to\infty}\int_0^{\eta-\delta} e^{-s(\tau+\delta)}f(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau\, e^{-s\delta} \\ &= e^{-s\delta}F(s)\end{aligned}$$

□

**Beispiel 28.12.** $f(t) = e^{\delta t}\cos(\omega t)$, $\mathcal{L}\big[\cos\omega t\big](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

$$\underset{28.11}{\Rightarrow} \ \mathcal{L}[f] = \frac{s-\delta}{(s-\delta)^2+\omega^2}$$

## 28.2. Faltungen

**Definition 28.13.** Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und

$$f_1(t) = f_2(t) = 0 \text{ für } t < 0$$

$$\big(f_1 *_L f_2\big)(t) := \int_0^t f_1(t-u) f_2(u)\, du \quad (t \in \mathbb{R})$$

heißt die *Faltung* (*Konvolution*) von $f_1$, $f_2$.

**Bemerkung 28.14.** Zwischen der eben definierten Faltung $*_L$ und der Faltung $*_F$ bei der Fourier–Transformation (vgl. 27.17) besteht folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
\big(f_1 *_F f_2\big)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u) f_2(u)\, du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f_1(t-u) f_2(u)\, du = \frac{1}{2\pi} \int_0^t f_1(t-u) f_2(u)\, du \\
&= \frac{1}{2\pi} \big(f_1 *_L f_2\big)(t)
\end{aligned}$$

*Vereinbarung:* In diesem Abschnitt schreiben wir $*$ statt $*_L$.

**Satz 28.15** (Faltungssatz)**.** $f_1$ sei stetig, $f_2$ sei stückweise stetig und beide seien von exponentieller Ordnug $\gamma$ ($f_1 = f_2 = 0$ auf $(-\infty, 0)$)

Dann existiert $\mathcal{L}\big[f_1 * f_2\big](s)$ für alle $\operatorname{Re} s > \gamma$ und es gilt

$$\mathcal{L}\big[f_1 * f_2\big] = \mathcal{L}[f_1] \cdot \mathcal{L}[f_2]$$

(ohne Beweis)

**Beispiel 28.16.** Sei $F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s^2+4}$ gegeben. Gesucht: $f$ mit $\mathcal{L}[f] = F$.

Sei

$$g(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{array} \right\} = h_0(t)$$

und $h(t) = \sin(2t)$.

Bekannt:

$$\mathcal{L}[g] = \frac{1}{s}, \qquad \mathcal{L}[h] = \frac{2}{s^2+4} \qquad \text{für } \operatorname{Re} s > 0$$

also:

$$F(s) = \mathcal{L}[g](s) \cdot \mathcal{L}[h](s) \underset{28.15}{=} \mathcal{L}\big[g * h\big](s)$$

$$\Rightarrow\ f(t) = \big(g * h\big)(t) = \int_0^t g(t-u) h(u)\, du = \int_0^t \sin(2u)\, du = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2t)\big)$$

## 28.3. Ableitungen und Stammfunktionen

**Satz 28.17.** $f$ sei auf $[0,\infty)$ stetig und stückweise glatt. $f$ sei von exponentieller Ordnung $\gamma$.

Dann existiert die LAPLACE–Transformierte $\mathcal{L}[f']$ von $f'$ für $\mathrm{Re}(s) > \gamma$, und

$$\boxed{\mathcal{L}\big[f'\big](s) = s\mathcal{L}\big[f\big](s) - f(0)}$$

**Beweis:** Sei $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s > \gamma$, $F := \mathcal{L}[f]$.

Dann gilt für $\eta \in (0,\infty)$:

$$\int_0^\eta e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-st} \cdot f(t)\Big|_{t=0}^{t=\eta} + \int_0^\eta s e^{-st} f(t)\, dt = e^{-s\eta} f(\eta) - f(0) + s \underbrace{\int_0^\eta e^{-st} f(t)\, dt}_{\xrightarrow{\eta\to\infty} F(s)}$$

Zu zeigen: $e^{-s\eta} f(\eta) \to 0$ für $\eta \to \infty$

$$\left|e^{-s\eta} f(\eta)\right| = e^{-\mathrm{Re}(s)\cdot\eta} \cdot |f(\eta)| \le e^{-\mathrm{Re}(s)\cdot\eta} \cdot M e^{\gamma\eta} = M e^{-(\mathrm{Re}(s)-\gamma)\eta} \xrightarrow{\gamma\to\infty} 0 \qquad (\mathrm{Re}(s) > \gamma)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt$$

ist konvergent (und damit $= \mathcal{L}[f'](s)$) und

$$\mathcal{L}\big[f'\big](s) = -f(0) + s\mathcal{L}\big[f\big](s)$$

□

Mit Induktion erhält man aus 28.17:

**Satz 28.18.** $f$ sei auf $[0,\infty)$ $(r-1)$-mal stetig differenzierbar, und $f^{(r-1)}$ sei stückweise glatt. $f, \dots, f^{(r-1)}$ seien von exponentieller Ordnung $\gamma$.

Dann existiert die LAPLACE–Transformierte $\mathcal{L}\big[f^{(r)}\big]$ von $f^{(r)}$ für $\mathrm{Re}(s) > \gamma$, und es gilt

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f^{(r)}\right](s) = s^r \cdot \mathcal{L}\big[f\big](s) - \left[s^{r-1} f(0) + s^{r-2} f'(0) + \dots + s f^{(r-2)}(0) + f^{(r-1)}(0)\right]}$$

**Beispiel 28.19.** Sei $f(t) := \sin(\omega t + \varphi)$

$$\left[\begin{array}{rl} & f(t) = \sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi \\ \Rightarrow & \mathcal{L}\big[f\big](s) = \cos\varphi \cdot \mathcal{L}\big[\sin(\omega\cdot)\big](s) + \sin\varphi \cdot \mathcal{L}\big[\cos(\omega\cdot)\big](s) = \cos\varphi \dfrac{\omega}{\omega^2+s^2} + \sin\varphi \dfrac{s}{\omega^2+s^2} \end{array}\right]$$

Berechne (einfacher, falls $\mathcal{L}\big[\sin(\omega\cdot)\big]$ und $\mathcal{L}\big[\cos(\omega\cdot)\big]$ noch nicht bekannt) $\mathcal{L}[f]$ mit Hilfe von 28.18:

$$f''(t) = -\omega^2 f(t)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \mathcal{L}\big[0\big](s) = \mathcal{L}\big[f'' + \omega^2 f\big](s) = \mathcal{L}\big[f''\big](s) + \omega^2 \mathcal{L}\big[f\big](s)$$

$$\mathcal{L}\big[f''\big](s) = s^2\mathcal{L}\big[f\big](s) - \big(s\underbrace{f(0)}_{\sin\varphi} + \underbrace{f'(0)}_{\omega\cos\varphi}\big)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = (s^2+\omega^2)\cdot\mathcal{L}\big[f\big](s) - (s\sin\varphi + \omega\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\big[f\big](s) = \frac{s\sin\varphi + \omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}$$

Verhalten der LAPLACE–Transformation bei Stammfunktionsbildung:

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung $\gamma$. Weiter sei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall t \in [0,\infty) \quad g(t) := \int\limits_0^t f(u)\,du$$

Nach 10.25 ist $g$ stetig und stückweise glatt ($g'(t) = f(t)$ in allen Stetigkeitsstellen $t$ von $f$) Ferner:

$$\forall t > 0 \quad |g(t)| \le \int\limits_0^t |f(u)|\,du \le M\int\limits_0^t e^{\gamma u}\,du = \begin{cases} \frac{1}{\gamma}\cdot(e^{\gamma t}-1) & \text{falls } \gamma > 0 \\ t & \text{falls } \gamma = 0 \\ \frac{1}{|\gamma|}\cdot(1-e^{\gamma t}) & \text{falls } \gamma < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g \text{ ist von exponentieller Ordnung } \begin{cases} \gamma & \gamma > 0 \\ \delta(>0 \text{ beliebig}) & \gamma = 0 \\ 0 & \gamma < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\big[g\big](s) \text{ ist definiert für } \begin{cases} \mathrm{Re}(s) > \gamma & \gamma > 0 \\ \mathrm{Re}(s) > 0 & \gamma \le 0 \end{cases}$$

und nach 28.17 gilt

$$\mathcal{L}\big[f\big](s) = \mathcal{L}\big[g'\big](s) = s\mathcal{L}[g](s) - \underbrace{g(0)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\big[g\big](s) = \tfrac{1}{s}\mathcal{L}\big[f\big](s) \text{ für } \begin{cases} \mathrm{Re}(s) > \gamma & \gamma > 0 \\ \mathrm{Re}(s) > 0 & \gamma \le 0 \end{cases}}$$

**Beispiel 28.20.** Sei $f(t) := t^n$ mit einem $n \in \mathbb{N}_0$

*Behauptung:*

$$\mathcal{L}\big[f\big](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0$$

**Beweis:** $n = 0$: Schon bekannt: $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$n \to n+1$: Gelte (mit $f_n(t) := t^n$):

$$\mathcal{L}\big[f_n\big](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\big[f_{n+1}\big](s) = \mathcal{L}\left[(n+1)\int\limits_0^{\cdot} u^n\,du\right](s) = (n+1)\cdot\frac{1}{s}\cdot\mathcal{L}\big[f_n\big](s) \underset{\text{I.A.}}{=} (n+1)\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}$$

□

**Satz 28.21.** $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei stückweise stetig und periodisch mit Periode $T > 0$, d.h. es gelte

$$\forall t \in [0,\infty) \quad f(t+T) = f(t)$$

(Insbesondere ist also $f$ beschränkt, d.h. von exponentieller Ordnung 0.)
Dann gilt für $\mathrm{Re}(s) > 0$:

$$\mathcal{L}\big[f\big](s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \cdot \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

**Beweis:**

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall t \geq 0 \quad f(t+kT) = f(t)$$

Daher für $\mathrm{Re}(s) > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big[f\big](s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \sum_{k=0}^\infty \underbrace{\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t)\, dt}_{\text{Subst. } u=t-kT} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \int_0^T e^{-s(u+kT)} \underbrace{f(u+kT)}_{=f(u)}\, du \\
&= \sum_{k=0}^\infty e^{-skT} \underbrace{\int_0^T e^{-su} f(u)\, du}_{\text{unabh. von } k} \\
&= \left[\sum_{k=0}^\infty \left(e^{-sT}\right)^k\right] \cdot \int_0^T e^{-su} f(u)\, du \\
&= \frac{1}{1-e^{-sT}} \cdot \int_0^T e^{-su} f(u)\, du
\end{aligned}$$

da $\left|e^{-sT}\right| = e^{-\mathrm{Re}(s)T} < 1$, da $\mathrm{Re}(s) > 0$, $T > 0$. (vgl. auch Seite 208) $\square$

**Beispiel 28.22.** Sei $T > 0$ und $h := h_0 := \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$

Setze

$$\forall t \in [0,T) \quad f(t) := h(t) - 2h\left(t - \tfrac{T}{2}\right)$$

Setze $f$ $T$-periodisch auf $[0,\infty)$ fort.

Also nach 28.21: Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big[f\big](s) &= \frac{1}{1-e^{sT}} \cdot \int\limits_0^T e^{-st} f(t)\, dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-sT}} \left[ \int\limits_0^{\frac{T}{2}} e^{-st}\, dt - \int\limits_{\frac{T}{2}}^{T} e^{-st}\, dt \right] \\
&= \frac{1}{1-e^{-sT}} \cdot \left[ \frac{1-e^{-s\frac{T}{2}}}{s} - \frac{e^{-s\frac{T}{2}} - e^{-sT}}{s} \right] \\
&= \frac{1}{s} \cdot \frac{1 - 2e^{-s\frac{T}{2}} + e^{-sT}}{1-e^{-sT}} \;=\; \frac{1}{s} \cdot \frac{\left(1-e^{-s\frac{T}{2}}\right)^2}{\left(1-e^{-s\frac{T}{2}}\right) \cdot \left(1+e^{-s\frac{T}{2}}\right)} \\
&= \frac{1}{s} \cdot \frac{1-e^{-s\frac{T}{2}}}{1+e^{-s\frac{T}{2}}} \;=\; \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{s\frac{T}{4}} - e^{-s\frac{T}{4}}}{e^{s\frac{T}{4}} + e^{-s\frac{T}{4}}} \\
&= \tfrac{1}{s} \cdot \tanh\left(s \cdot \tfrac{T}{4}\right)
\end{aligned}$$

Tabellen wie A.5 (Seite 330) sind insbesondere wichtig, um die Umkehrabbildung der Laplace–Transformation zumindest teilweise zu kennen.

$\mathcal{L}^{-1}[F]$ berechnen $\Leftrightarrow$ Aus Tabellen „erkennen“, welches Urbild $F$ hat.

## 28.4. Anwendungen auf lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ stetig und von exponentieller Ordnung. Setze $a_n := 1$

Dann:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big[g\big](s) &\overset{!}{=} \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}\right](s) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{L}\left[y^{(k)}\right](s) \\
&= a_0 \mathcal{L}\big[y\big](s) + \sum_{k=1}^{n} a_k \left[ s^k \mathcal{L}\big[y\big](s) - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-1-j} \cdot \underbrace{y^{(j)}(0)}_{\overset{!}{=} y_j} \right] \\
&= \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{n} a_k s^k \right)}_{=: p(s)} \cdot \mathcal{L}\big[y\big](s) - \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-1-j} y_j
\end{aligned}$$

($p$ ist das charakteristische Polynom der Differentialgleichung)

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\big[y\big](s) = \frac{1}{p(s)} \cdot \left( \mathcal{L}\big[g\big](s) + \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-1-j} y_j \right)}$$

Hieraus mittels Inversion der LAPLACE–Transformation die Lösung $y$ bestimmen!

**Beispiel 28.23.** $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \pi$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ 0 &= \mathcal{L}\big[0\big](s) = \mathcal{L}\big[y'' + y\big](s) = \mathcal{L}\big[y''\big](s) + \mathcal{L}\big[y\big](s) \\
&= s^2 \mathcal{L}\big[y\big](s) - \underbrace{y'(0)}_{=\pi} - s \cdot \underbrace{y(0)}_{=1} + \mathcal{L}\big[y\big](s) \\
&= (s^2 + 1)\mathcal{L}\big[y\big](s) - (s + \pi)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \mathcal{L}\big[y\big](s) = \frac{s+\pi}{s^2+1} = \underbrace{\frac{s}{s^2+1}}_{\mathcal{L}[\cos](s)} + \pi \cdot \underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{\mathcal{L}[\sin](s)} = \mathcal{L}\big[\cos + \pi \cdot \sin\big](s)$$

$$\underset{28.8}{\Rightarrow}\ y(x) = \cos(x) + \pi \cdot \sin(x)$$

Probe: ist tatsächlich Lösung

**Beispiel 28.24.** *Randwertproblem:*

$$y'' + 9y = \cos(2x), \quad y(0) = 1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\mathcal{L}\big[\cos(2\cdot)\big](s) = \frac{s}{s^2+4}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \frac{s}{s^2+4} &\overset{!}{=} \mathcal{L}\big[y'' + 9y\big](s) = \mathcal{L}\big[y''\big](s) + 9\mathcal{L}\big[y\big](s) \\
&= s^2 \mathcal{L}\big[y\big](s) - \underbrace{y'(0)}_{=c} - s \cdot \underbrace{y(0)}_{=1} + 9\mathcal{L}\big[y\big](s) \\
&= (s^2 + 9)\mathcal{L}\big[y\big](s) - (s + c)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \mathcal{L}\big[y\big](s) = \frac{1}{s^2+9} \cdot \left( \frac{s}{s^2+4} + s + c \right) = \frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)} + \underbrace{\frac{s}{s^2+9}}_{\mathcal{L}[\cos(3\cdot)](s)} + \underbrace{c \cdot \frac{1}{s^2+9}}_{=\tilde{c} \cdot \frac{3}{s^2+9}}$$

Wir brauchen das Urbild von $\frac{s}{(s^2+9)(x^2+4)}$ unter $\mathcal{L}$:

$$\frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ s &= (As+B)(s^2+4) + (Cs+D)(s^2+9) \\
&= s^3(A+C) + s^2(B+D) + s(4A+9C) + (4B+9D)
\end{aligned}$$

$$1 \overset{!}{=} 4A + 9C = -5A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{5} \ \Rightarrow\ C = \frac{1}{5}$$

$$0 \overset{!}{=} 4B + 9D = -5B \quad \Rightarrow \quad B = D = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{s}{s^2+4}$$
$$= -\frac{1}{5} \cdot \mathcal{L}\big[\cos(3\cdot)\big](s) + \frac{1}{5} \cdot \mathcal{L}\big[\cos(2\cdot)\big](s)$$

$$\Rightarrow \; \mathcal{L}\big[y\big](s) = -\frac{1}{5} \cdot \mathcal{L}\big[\cos(3\cdot)\big](s) + \frac{1}{5} \cdot \mathcal{L}\big[\cos(2\cdot)\big](s) + \mathcal{L}\big[\cos(3\cdot)\big](s) + \tilde{c} \cdot \mathcal{L}\big[\sin(3\cdot)\big](s)$$
$$= \mathcal{L}\left[\frac{4}{5}\cos(3\cdot) + \frac{1}{5}\cos(2\cdot) + \tilde{c}\sin(3\cdot)\right](s)$$

$$\underset{28.8}{\Rightarrow} \; y(x) = \frac{4}{5} \cdot \cos(3x) + \frac{1}{5} \cdot \cos(2x) + \tilde{c} \cdot \sin(3x)$$

Jetzt $\tilde{c}$ so einrichten, dass die zweite Randbedingung $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ erfüllt ist:

$$-1 \overset{!}{=} \frac{4}{5} \cdot \cos\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) + \frac{1}{5} \cdot \cos(\pi) + \tilde{c} \cdot \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) = -\frac{1}{5} - \tilde{c} \quad \Rightarrow \quad \tilde{c} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{4}{5} \cdot \big[\cos(3x) + \sin(3x)\big] + \frac{1}{5} \cdot \cos(2x)$$

**Beispiel 28.25.** System:

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Setze $y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, also

$$u' = u + v$$
$$v' = 4u - 2v$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[u'](s) \overset{!}{=} \mathcal{L}[u](s) + \mathcal{L}[v](s) = s\mathcal{L}[u](s) - u(0) = s\mathcal{L}[u](s)$$
$$\mathcal{L}[v'](s) \overset{!}{=} 4\mathcal{L}[u](s) - 2\mathcal{L}[v](s) = s\mathcal{L}[v](s) - v(0) = s\mathcal{L}[v](s) - 5$$

$$\Leftrightarrow \; (s-1) \cdot \mathcal{L}[u](s) - \mathcal{L}[v](s) = 0$$
$$4\mathcal{L}[u](s) - (s+2) \cdot \mathcal{L}[v](s) = -5$$

$$\Rightarrow \quad \big[4 - (s+2) \cdot (s-1)\big] \cdot \mathcal{L}[u](s) = -5$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[u](s) = \frac{5}{s^2+s-6} = \frac{5}{(s-2)(s+3)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+3} = \mathcal{L}\big[e^{2\cdot}\big] - \mathcal{L}\big[e^{-3\cdot}\big](s)$$

$$\underset{28.8}{\Rightarrow} \; u(x) = e^{2x} - e^{-3x}$$

$$\Rightarrow \quad v(x) = \big(u(x) + v(x)\big) - u(x) = u'(x) - u(x) = 2e^{2x} + 3e^{-3x} - e^{2x} + e^{-3x} = e^{2x} + 4e^{-3x}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} - e^{-3x} \\ e^{2x} + 4e^{-3x} \end{pmatrix}$$

# A. Tabellen

Tabelle A.1.: Verschiedene Funktionsdefinitionen

| | |
|---|---|
| $e^x$ | $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ |
| $\sin x$ | $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ |
| $\cos x$ | $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$ |
| $\tan x$ | $\frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ |
| $\cot x$ | $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ |
| $\sinh x$ | $\frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})$ |
| $\cosh x$ | $\frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$ |
| $\tanh x$ | $\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ |
| $\coth x$ | $\frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ |
| $\operatorname{arsinh} x$ | $\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ |
| $\operatorname{arcosh} x$ | $\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ |
| $\operatorname{artanh} x$ | $\frac{1}{2} \cdot \log \frac{1+x}{1-x}$ |
| $\operatorname{arcoth} x$ | $\frac{1}{2} \cdot \log \frac{x+1}{x-1}$ |

Tabelle A.2.: Additionstheoreme

- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Tabelle A.3.: Einige Funktionen und ihre Ableitungen

| $f$ | $f'$ |
|---|---|
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x^n}$ | $\frac{-n}{x^{n+1}}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\sqrt[n]{x}$ | $\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\log x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $a^x$ | $a^x \log a$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{x}$ |

Tabelle A.4.: Trigonometrische Funktionen und ihre Ableitungen und Stammfunktionen

| Ableitung $f'(x)$ | Funktion $f(x)$ | Stammfunktion $F(x)$ |
|---|---|---|
| $\cos(x)$ | $\sin(x)$ | $-\cos(x)$ |
| $-\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $\sin(x)$ |
| $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ | $\tan(x)$ | $-\log\lvert\cos(x)\rvert$ |
| $\frac{-1}{\sin^2(x)} = -\big(1 + \cot^2(x)\big)$ | $\cot(x)$ | $\log\lvert\sin(x)\rvert$ |
| $\cosh(x)$ | $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ |
| $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ | $\sinh(x)$ |
| $\frac{1}{\cosh^2(x)}$ | $\tanh(x)$ | $\log\big(\cosh(x)\big)$ |
| $\frac{-1}{\sinh^2(x)}$ | $\coth(x)$ | $\log\big(\sinh(x)\big)$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin(x)$ | $x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$ |
| $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arccos(x)$ | $x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan(x)$ | $x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)$ |
| $\frac{-1}{1+x^2}$ | $\mathrm{arccot}(x)$ | $x \cdot \mathrm{arccot}(x) + \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\mathrm{arsinh}(x)$ | $x \cdot \mathrm{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\mathrm{arcosh}(x)$ | $x \cdot \mathrm{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $\mathrm{artanh}(x)$ | $x \cdot \mathrm{artanh}(x) + \frac{1}{2} \cdot \log\left(1-x^2\right)$ |
| $\frac{-1}{x^2-1}$ | $\mathrm{arcoth}(x)$ | $x \cdot \mathrm{arcoth}(x) + \frac{1}{2} \cdot \log\left(x^2-1\right)$ |

Tabelle A.5.: Einige Funktionen und ihre LAPLACE–Transformierten

| $f(t)$ (auf $[0,\infty)$) | $\mathcal{L}[f](s)$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ |
| $\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$ $(n \in \mathbb{N})$ | $\frac{1}{(s-a)^n}$ |
| $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $\cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| $e^{at}\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ |
| $e^{at}\cos(\omega t)$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$ |
| $\sinh(at)$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$ |
| $\cosh(at)$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ |
| $e^{bt}\sinh(at)$ | $\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$ |
| $e^{bt}\cosh(bt)$ | $\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$ |
| $t\sin(\omega t)$ | $\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$ |
| $t\cos(\omega t)$ | $\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ |
| $g'(t)$ | $s\mathcal{L}\big[g\big](s) - g(0)$ |
| $g^{(n)}(t)$ | $s^n\mathcal{L}\big[g\big](s) - \big(s^{n-1}g(0) + \cdots + g^{(n-1)}(0)\big)$ |
| $\int\limits_0^t g(t)\,dt$ | $\frac{1}{s}\cdot\mathcal{L}\big[g\big](s)$ |
| $\int\limits_0^t f_1(u)f_2(t-u)\,du$ | $\mathcal{L}\big[f_1\big](s)\cdot\mathcal{L}\big[f_2\big](s)$ |
| $e^{-at}g(t)$ | $\mathcal{L}\big[g\big](s+a)$ |
| $\frac{1}{a}\cdot g\left(\frac{t}{a}\right)$ | $\mathcal{L}\big[g\big](as)$ |

# Literaturverzeichnis


[1] R. Ansorge / H. J. Oberle, *Mathematik für Ingenieure*, Band 1 + 2, Akademie Verlag, 2001

[2] K. Burg / H. Haf / F. Wille, *Höhere Mathematik für Ingenieure*, Band 1 + 2, Teubner, 2002

[3] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis 1 + 2*, Teubner, 2003

[4] H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Teubner, 1995

[5] K. Meyberg / P. Vachenauer, *Höhere Mathematik 2*, Springer, 2001

[6] W. Walter, *Analysis 1 + 2,* Springer, 2001

[7] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen,* Springer, 2000

# Index