©Gabi Schmithüsen, Rüdiger Kuhlmann, Johannes Rohe

Jordan-Normalform einer Matrix A, f_A zerfällt nicht in Linearfaktoren

- **Charakteristisches Polynom**
  Bestimme das charakteristische Polynom f_A: $f_A(x) = \det(xI - A) = p_1^{c_1} \cdot \dots \cdot p_r^{c_r}$, p_i Primpolynome.

- **Haupträume**
  Für jedes Primpolynom $p_i =: p$ berechne den Hauptraum $H(p, A)$:

$$\begin{aligned} H^0(p,A) &= \operatorname{Kern}(p(A)^0) = \operatorname{Kern}(I) = \{0\} \\ H^1(p,A) &= \operatorname{Kern}(p(A)^1) = \operatorname{Kern}(p(A)) \\ &\dots \quad\quad \dots \\ H^l(p,A) &= \operatorname{Kern}(p(A)^l) \\ &\dots \quad\quad \dots \end{aligned}$$

  Index t_i (im Skript: $l_{max}(p_i)$) ist die kleinste natürliche Zahl $t_i \geq 1$ mit $H^{t_i}(p,A) = H^{t_i+1}(p,A)$. Dann ist:

$$H^1(p,A) \underset{\neq}{\subset} H^2(p,A) \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} H^{t_i}(p,A) = H^{t_i+1}(p,A) = \dots = H(p,A).$$

- **Minimalpolynom**
  $h_A(x) = p_1^{t_1} \cdot \dots \cdot p_r^{t_r}$, dabei ist $1 \leq t_i \leq c_i$ für $i = 1, \dots, r$.

- **Jordan-Normalform**
  Zu jedem Primpolynom $p_i =: p$ gehört ein Jordanblock:

  Exponent c_i des charakteristischen Polynoms mal Grad p: Größe des Jordan-Blockes
  Exponent $t_i =: t$ des Minimalpolynoms mal Grad p: Größe des größten Jordankästchens
  Dimension $\dim H_\lambda^1(A)$ des Hauptraums 1. Stufe durch Grad p: Anzahl der Jordankästchen im Jordanblock

  ▷ Bestimme $m(p,1,A), \dots, m(p,t,A)$ mit:

$$\begin{aligned} \dim H^t(p,A) - \dim H^{t-1}(p,A) &= m(p,t,A) \cdot \text{Grad } p \\ \dim H^{t-1}(p,A) - \dim H^{t-2}(p,A) &= (m(p,t,A) + m(p,t-1,A)) \cdot \text{Grad } p \\ &\dots \quad\quad \dots \\ \dim H^1(p,A) - \underbrace{\dim H^0(p,A)}_{=0} &= (m(p,t,A) + m(p,t-1,A) + \dots + m(p,1,A)) \cdot \text{Grad } p \end{aligned}$$

  ▷ Für jedes l von t absteigend bis 1:
  $m(p,l,A)$: Anzahl der Jordankästchen der Größe $l \cdot$Grad p
  l: Anzahl der Mikrokästchen im Jordankästchen
  Grad p: Größe des Mikrokästchens
  Jedes Mikrokästchen ist die Begleitmatrix von p.

- **Jordan-Basis**
  Betrachte Jordanblock zu jedem Primpolynom $p_i =: p$, $g := \text{Grad } p_i$:

  ▷ Bestimme $U_t, U_{t-1}, \dots, U_1$ mit:

$$\begin{aligned} H^t(p,A) &= H^{t-1}(p,A) \oplus U_t && (\dim U_t = m(p,t,A) \cdot \text{Grad } p) \\ H^{t-1}(p,A) &= H^{t-2}(p,A) \oplus p(A) \cdot U_t \oplus U_{t-1} && (\dim U_{t-1} = m(p,t-1,A) \cdot \text{Grad } p) \\ &\dots \quad\quad \dots \\ H^2(p,A) &= H^1(p,A) \oplus p(A)^{t-1} \cdot U_t \oplus \dots \oplus p(A) \cdot U_2 \oplus U_1 && (\dim U_1 = m(p,1,A) \cdot \text{Grad } p) \end{aligned}$$

  Bemerkung: Berechne U_l erst, wenn es benötigt wird!

  ▷ Für jedes l von t absteigend bis 1:
    ▷ Für jedes k von 1 bis $m(p,l,A)$:
      ▷ Wähle $b_k^{(l)}$ aus $U_l \setminus \langle B(p_i,l,1), \dots, B(p_i,l,k-1) \rangle$. Dann ergeben folgende Zeilen geordnete Basen:

$$\begin{array}{cccc} b_k^{(l)} & A \cdot b_k^{(l)} & \dots & A^{g-1} \cdot b_k^{(l)} \\ p(A) \cdot b_k^{(l)} & A \cdot p(A) \cdot b_k^{(l)} & \dots & A^{g-1} \cdot p(A) \cdot b_k^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(A)^{l-1} \cdot b_k^{(l)} & A \cdot p(A)^{l-1} \cdot b_k^{(l)} & \dots & A^{g-1} \cdot p(A)^{l-1} \cdot b_k^{(l)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Basis } B(p_i,l,k,1) \text{ des 1. Mikrokästchens} \\ \text{Basis } B(p_i,l,k,2) \text{ des 2. Mikrokästchens} \\ \vdots \\ \text{Basis } B(p_i,l,k,l) \text{ des } l\text{. Mikrokästchens} \end{array}$$

      ▷ Dann ergeben $B(p_i,l,k,1), \dots, B(p_i,l,k,l)$ hintereinandergelesen eine geordnete Basis $B(p_i,l,k)$ des Jordankästchens.
    ▷ Dann ergeben $B(p_i,l,1), \dots, B(p_i,l,m(p_i,l,A))$ hintereinandergelesen eine geordnete Basis $B(p_i,l)$ aller Jordankästchen der Größe $l \cdot$Grad p_i zu p_i.
  ▷ Dann ergeben $B(p_i,t), \dots, B(p_i,1)$ hintereinandergelesen eine geordnete Basis $B(p_i)$ des Jordanblockes zu p_i, wobei die Jordankästchen der JNF der Größe nach geordnet sind.

  Dann ergeben $B(p_1), \dots, B(p_r)$ hintereinandergelesen eine geordnete Basis B der JNF.

- **Basiswechselmatrix**
  Als Spalten nebeneinandergeschrieben ergeben die Vektoren aus B die Matrix T mit $T^{-1}AT = \text{JNF}(A)$.