©Gabi Schmithüsen, Rüdiger Kuhlmann, Johannes Rohe

Jordan-Normalform einer Matrix A, f_A zerfällt in Linearfaktoren

- **Charakteristisches Polynom**
  Bestimme das charakteristische Polynom f_A: $f_A(x) = \det(xI - A) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_r)^{c_r}$.

- **Haupträume**
  Für jeden Eigenwert $\lambda_i =: \lambda$ berechne den Hauptraum $H(\lambda, A)$:

$$\begin{array}{rcl} H_\lambda^0(A) & = & \mathrm{Kern}\,((A-\lambda I)^0) = \mathrm{Kern}\,(I) = \{0\} \\ H_\lambda^1(A) & = & \mathrm{Kern}\,((A-\lambda I)^1) = \mathrm{Kern}\,(A-\lambda I) = \mathrm{E}_\lambda(A) \\ \dots & & \dots \\ H_\lambda^l(A) & = & \mathrm{Kern}\,((A-\lambda I)^l) \\ \dots & & \dots \end{array}$$

  Index t_i (im Skript: $l_{max}(p_i)$) ist die kleinste natürliche Zahl $t_i \geq 1$ mit $H_\lambda^{t_i}(A) = H_\lambda^{t_i+1}(A)$. Dann ist:

$$H_\lambda^1(A) \underset{\neq}{\subset} H_\lambda^2(A) \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} H_\lambda^{t_i}(A) = H_\lambda^{t_i+1}(A) = \cdots = H_\lambda(A).$$

- ○ **Minimalpolynom**
  $h_A(x) = (x - \lambda_1)^{t_1} \cdots (x - \lambda_r)^{t_r}$, dabei ist $1 \leq t_i \leq c_i$ für $i = 1, \dots, r$.

- **Jordan-Normalform**
  Zu jedem Eigenwert $\lambda_i =: \lambda$ gehört ein Jordanblock:

Exponent c_i des charakteristischen Polynoms:	Größe des Jordan-Blockes
Exponent $t_i =: t$ des Minimalpolynoms:	Größe des größten Jordankästchens
Dimension $\dim H_\lambda^1(A)$ des Hauptraumes erster Stufe:	Anzahl der Jordankästchen im Jordanblock

  ▹ Bestimme $m_\lambda(1, A), \dots, m_\lambda(t, A)$ mit:

$$\begin{array}{rcl} \dim H_\lambda^t(A) - \dim H_\lambda^{t-1}(A) & = & m_\lambda(t, A) \\ \dim H_\lambda^{t-1}(A) - \dim H_\lambda^{t-2}(A) & = & m_\lambda(t, A) + m_\lambda(t-1, A) \\ \dots & & \dots \\ \dim H_\lambda^1(A) - \underbrace{\dim H_\lambda^0(A)}_{=0} & = & m_\lambda(t, A) + m_\lambda(t-1, A) + \cdots + m_\lambda(1, A) \end{array}$$

  ▹ Für jedes l von t absteigend bis 1:

  $m_\lambda(l, A)$: Anzahl der Jordankästchen der Größe l
  l: Anzahl der Mikrokästchen (λ) im Jordanblock

  Jedes Jordankästchen ist in der Hauptdiagonalen mit λ besetzt, in der Diagonalen darunter mit Einsen.

- **Jordan-Basis**
  Betrachte Jordanblock zu jedem Eigenwert $\lambda_i =: \lambda$:

  ▹ Bestimme U_t, U_{t-1}, …, U_1 mit:

$$\begin{array}{rcll} H_\lambda^t(A) & = & H_\lambda^{t-1}(A) \oplus U_t & (\dim U_t = m_\lambda(t, A)) \\ H_\lambda^{t-1}(A) & = & H_\lambda^{t-2}(A) \oplus (A - \lambda I)\cdot U_t \oplus U_{t-1} & (\dim U_{t-1} = m_\lambda(t-1, A)) \\ \dots & & \dots & \\ H_\lambda^2(A) & = & H_\lambda^1(A) \oplus (A-\lambda I)^{t-1}\cdot U_t \oplus \cdots \oplus (A - \lambda I)\cdot U_2 \oplus U_1 & (\dim U_1 = m_\lambda(1, A)) \end{array}$$

  Bemerkung: Berechne U_l erst, wenn es benötigt wird!

  ▹ Für jedes l von t absteigend bis 1:

  - ▹ Für jedes k von 1 bis $m_\lambda(l, A)$:
    - ▹ Wähle $b_k^{(l)}$ aus $U_l \setminus \langle B(p_i, l, 1), \dots, B(p_i, l, k-1)\rangle$.
    - ▹ Dann ergeben $b_k^{(l)}$, $(A - \lambda I)\cdot b_k^{(l)}, \dots, (A - \lambda I)^{l-1}\cdot b_k^{(l)}$ eine geordnete Basis $B(\lambda_i, l, k)$ des Jordankästchens.
  - ▹ Dann ergeben $B(\lambda_i, l, 1), \dots, B(\lambda_i, l, m_\lambda(l, A))$ hintereinander gelesen eine geordnete Basis $B(\lambda_i, l)$ aller Jordankästchen der Größe l zu λ_i.

  ▹ Dann ergeben $B(\lambda_i, t), \dots, B(\lambda_i, 1)$ hintereinandergelesen eine geordnete Basis $B(\lambda_i)$ des Jordanblockes zu λ_i, wobei die Jordankästchen der JNF der Größe nach geordnet sind.

  Dann ergeben $B(\lambda_1), \dots, B(\lambda_r)$ hintereinandergelesen eine geordnete Basis B der JNF.

- **Basiswechselmatrix**
  Als Spalten nebeneinandergeschrieben ergeben die Vektoren aus B die Matrix T mit $T^{-1}AT = \mathrm{JNF}(A)$.