PHYSIK II für Informatiker und Technomathematiker

Mitschrieb der Vorlesung Physik II für Informatiker und Technomathematiker von Herrn Prof. Kluge im Wintersemester 2001/2002 von Daniel Winkler und Michael Rückauer.



 $\mbox{\sc Lat} T_{\mbox{\sc E}} X-\mbox{\sc Build}$ vom: 23. März 2002 12:16

Inhaltsverzeichnis

\mathbf{IV}	Mechanik der Wellen					
	IV.1	Wellenausbreitung und Wellengleichung	5			
		IV.1.1 Wellenausbreitung	5			
		IV.1.2 Wellengleichung für elektromagnetische Wellen	7			
		IV.1.3 Energie und Impuls einer elektromagnetischen Welle	12			
		IV.1.4 Hertzscher Dipol	13			
	IV.2	Fouriertheorem	15			
		IV.2.1 Fourieranalyse einer periodischen Bewegung	15			
		IV.2.2 Fourierintegral für nichtperiodische Bewegungen	19			
	IV.3	Phasen- und Gruppengeschwindigkeit	23			
	IV.4	Interferenz und Beugung	24			
		IV.4.1 Reflexion und Brechung von Wellen	24			
		IV.4.2 Der Doppler-Effekt	26			
		IV.4.3 Superposition (Interferenz) von Wellen	34			
		IV.4.3.1 Interferenz von Wellen	34			
		IV.4.3.2 Interferenz von N Quellen mit fester Phasenbeziehung $\ldots \ldots \ldots$	35			
		IV.4.3.3 Stehende eindimensionale Wellen	37			
		IV.4.3.4 Zwei- und dreidimensionale stehende Wellen, Resonatoren \ldots .	40			
		IV.4.4 Beugung von Wellen	41			
		IV.4.4.1 Beugung am Spalt	44			
		IV.4.4.2 Beugung an zwei gleichen parallelen Spalten	47			
		IV.4.4.3 Beugungsgitter	47			
		IV.4.5 Röntgenbeugung	48			
v	Wech	Wechselwirkung von e.m. Strahlung mit Materie 55				
	V.1	Photonen	51			
		V.1.1 Der Compton-Effekt	51			
		V.1.2 Photo-Effekt	56			
	V.2	Teilchen und Felder	58			
		V.2.1 Materiefelder	58			
		V.2.2 Exp. Nachweis von Welleneigenschaften	59			
	V.3	nkenexperiment zur Quantenphysik				
VI	Quar	ntenmechanik, Schrödingergleichung	65			
	VI.1	Unterschiede zwischen der klassischer Physik und der Quantenphysik	65			
	VI.2	Schrödingergleichung	65			

	VI.3	Potentialstufe	67
	VI.4	Teilchen in einem unendlichen tiefen Potentialkasten	72
	VI.5	Wasserstoffatom und Aufbau des Periodischen Systems	76
		VI.5.1 Vorbemerkung	76
		VI.5.2 H-Atom	77
		VI.5.3 Periodensystem	87
VII	Bänd	lerstruktur des Festkörpers	89
	VII.1	Bindungstypen	89
	VII.2	Periodisches Potential	90
	VII.3	Modell freier Elektronen im Festkörper	94
	VII.4	Elektronenbewegung in einem periodischen Potential	97
		VII.4.1 Quantitatives Modell des Festkörpers	98
	VII.5	Leiter, Isolatoren, Halbleiter	99
	VII.6	Elementare Schaltelemente	103
VII	[Lasei	r	109
	VIII.1	1 Eigenschaften des Lasers	109
	VIII.2	2 Hohlraumstrahlung	110
	VIII.3	3 Elektromagnetische Übergänge	111
	VIII.4	4 Laser	112
\mathbf{A}	Inde	x	117
в	Abbi	ldungsverzeichnis	121
С	Liter	aturverzeichnis	125
D	Inter	net-Verweise	127

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit. Alle Rechte vorbehalten. Kommentare, Fehler und Vorschläge bitte an post@danielwinkler.de.

Kapitel IV

Mechanik der Wellen

IV.1 Wellenausbreitung und Wellengleichung

IV.1.1 Wellenausbreitung

- universales Phänomen
- Übertragung von Information durch "Wellen" oder "Teilchen" (Dualismus)

Was wird übertragen? Austausch von $\Delta \vec{p}$ (Impulsübertrag), ΔE , $\Delta \vec{L}$ (Drehimpulsübertrag), ΔQ , ...

Wellen:	Teilchen:	Teilgebiet
Schallwellen	Phononen	Akustik
elektromagnetische Wellen	Photonen (Licht)	
(Lichtwellen,		Optik
RÖNTGEN-Wellen,		Atomphysik
γ -Strahlen, Mikrowellen		Teilchenphysik
Wärmewellen)		Thermodynamik
Gravitationswellen?	Gravitonen?	
(nukleare Wellen)	Gluonen	Kernphysik

Dualismus: "Welle—Teilchen" sind nur Grenzfälle des gleichen physikalischen Sachverhalts, mehr oder weniger gut geeignet, physikalische Sachverhalte zu beschreiben.

Das Bild ist nicht entscheidend, nur der Austausch von Information ist wichtig.



Abbildung IV.1: Austausch von Impuls als Informationsübertragung

Es gibt eine Theorie (widerspruchsfrei, unwiderlegt), die diesen "Dualismus" beschreibt: **Quantenfeld-theorie**

Radiowellen
$$\leftarrow$$
 "kleine" Energie (nichtionisierend)Röntgenstrahlen \leftarrow "hohe" Energie (ionisierend)

Frage: Wie kommt es zur Wellenausbreitung?

Es gibt einen physikalischen Anfangszustand (stabil, unveränderlich), der "gestört" wird.

 \Rightarrow Ausbreitung von Wellen

Es treten zeitliche Änderungen auf, die zu räumlicher Ausbreitung führen.



Abbildung IV.2: Ausbreitung von Störungen bzw. Wellen

Funktion:

$$\xi = f(x \pm a)$$

Bewegung: gleichförmig v konstant, a = vt

$$\xi = f(x \pm vt) \left[= f(x,t) \right]$$

Ausdrücke der Form $\xi(x,t) = f(x \pm vt)$ beschreiben zeitliche und räumliche Ausbreitung von Wellen mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} .

 $f(\vec{r} \pm \vec{v}t)$

Wichtiger Sonderfall:

 $\xi(x,t)$ ist harmonisch (sin, cos, exp)

$$\xi(x,t) = \xi_0 \cdot \sin k(x - vt)$$

 $(k\ {\rm konstant};\ {\rm das}\ {\rm Argument}\ {\rm des}\ {\rm Sinus}\ {\rm muss}\ {\rm dimensionslos}\ {\rm sein})$

Welche Bedeutung hat k? Ersetze x durch $x + \frac{2\pi}{k}$

$$\xi\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) = \xi_0 \sin\left[k\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right)\right]$$
$$= \xi_0 \sin\left[k\left(x - vt\right) + 2\pi\right]$$
$$= \xi(x, t)$$

Wir haben Periodizität nach

$$\frac{2\pi}{k} = \lambda \qquad \text{Wellenlänge } \lambda$$

räumliche Wiederholung der Funktion ξ ; Periodizität im Raum. k gibt also an, wie viele Wellenlängen "auf 2π gehen": $\lambda \cdot k = 2\pi$. k heißt Wellenzahl (wave number)

Weiter soll sich die Funktion $\xi(x,t)$ nach der Periodendauer $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$ zeitlich wiederholen.¹

$$\xi(x, t+T) = \xi_0 \sin \left\{ k \left[x - v(t+T) \right] \right\}$$
$$= \xi_0 \sin \left[k(x - vt) - \underbrace{\frac{kv \cdot 2\pi}{\omega}}_{2\pi!} \right]$$
$$\frac{kv2\pi}{\omega} \stackrel{!}{=} 2\pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\omega}{v} \qquad \boxed{v = \lambda \cdot \nu}$$

Verknüpfungen zwischen räumlicher und zeitlicher Periodizität!

$$k = \frac{\omega}{v}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \boxed{v = \lambda \cdot \nu}$$

Licht (elektromagnetische Welle): c Lichtgeschwindigkeit $\cong 300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$

$$k = \frac{\omega}{c}; \qquad c = \lambda \cdot \nu$$

Interpretation der Verknüpfung:

Der physikalische Zustand wiederholt sich nach der Periode T, während er sich im Raum um Wellenlänge λ bewegt. (vgl. Abb. IV.3; $\tan \alpha = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu \stackrel{!}{=} v$, Steigung: $\frac{dx}{dt} \stackrel{!}{=} v$)

$$\lambda = v \cdot T$$

Harmonische Wellen:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t) = \xi_0 \sin k(x - vt)$$
$$\boxed{\xi(x,t) = \xi_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)}} \quad \text{(ebene Welle)}$$

IV.1.2 Wellengleichung für elektromagnetische Wellen

Gleichung gesucht, die als Lösung Funktionen der Gestalt $\xi(x,t) = f(x \pm vt)$ haben bzw.

$$\xi(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

MAXWELLsche Gleichungen

(1) div $\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ (ϱ Ladungsdichte)

(Quellen des $\vec{E} ext{-}\mbox{Feldes}$ sind elektrische Ladungen.)

(2) div $\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

(Es gibt keine Quellen des magnetischen Feldes, \vec{B} -Feldlinien sind geschlossen)

(3) rot $\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Induktionsgesetz)

 $^{^{1}\}nu$ Frequenz, $\omega=2\pi\nu$ Kreisfrequenz



Abbildung IV.3: Fortpflanzung einer Welle im Raum

(4) rot
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

(AMPÈREsches Gesetz und MAXWELLscher Verschiebungsstrom)

Im Vakuum: $\rho = 0, \ \vec{j} = 0 \ (\Rightarrow$ keine Ladungen und Ströme im Raum) Bilden:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{rot}\varepsilon_{0}\mu_{0} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
$$= \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})}_{\operatorname{div}\vec{B}=0} - \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})}_{\operatorname{div}\operatorname{grad}=\Delta}\vec{B}$$

wegen $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$ rechte Seite:

$$\varepsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{\partial \operatorname{rot} \vec{E}}{\partial t} = -\varepsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$
$$\Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

(Wellengleichung; $\rho = \vec{j} = 0$)

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Alle Ableitungen sind von 2. Ordnung (Ort und Zeit erscheinen bis auf einen Faktor $-\varepsilon_0\mu_0$ in gleicher Weise).

Allgemeine Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

 \vec{B} durch ξ ersetzt.

Der Differentialausdruck der 2. Ableitung in Raum und Zeit tritt immer wieder auf:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{(Laplace-Operator)}$$
$$\Delta \xi - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \qquad (\text{IV-i})$$
$$\Box = \Delta - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (\text{Quabla-Operator, D'Alemberr-Operator})$$

Zu klären bleibt im folgenden, was der Faktor $\frac{1}{v^2}$ mit $\varepsilon_0 \mu_0$ zu tun hat. Allgemeine Lösungen:

 $\xi = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$

Spezielle harmonische Lösung:

$$\xi = \xi_0 \cdot \sin(kx \pm \omega t)$$

Fasse diese Funktion nur als Funktion von x und t auf und setze in (IV-i) ein:

$$-k^{2}\xi_{0}\sin(kx\pm\omega t)+\xi_{0}\cdot\frac{\omega^{2}}{v^{2}}\cdot\sin(kx\pm\omega t)=0$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{\omega}{v}} \quad (\text{Dispersions relation})$$

Dieses Ergebnis hatten wir schon früher erhalten. Genau wie

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

folgt mit

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$
 (Wellengleichung für \vec{E} -Feld)

(unter der Voraussetzung $\varrho=\vec{j}=0)$

Wir wollen jetzt den Zusammenhang klären zwischen $\frac{1}{v^2}$ und $\varepsilon_0 \mu_0$.

Bilden räumliche Ableitungen:

Lösung dieser Wellengleichung für das \vec{E} -Feld:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$
 (3 Gleichungen (Vektorgleichung))

In Komponenten:

$$\begin{split} E_x &= E_{0x} \cdot e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \\ E_y &= E_{0y} \cdot e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \\ E_z &= E_{0z} \cdot e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \\ \text{grad} & E_x = \vec{\nabla} E_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} &= ik_x \cdot E_{0x} \cdot e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} = ik_x \cdot E_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} &= ik_y \cdot E_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= ik_z \cdot E_x \\ \Rightarrow & \text{grad} & E_x = \vec{\nabla} E_x = i\vec{k} E_x \quad (\text{Vektorgleichung}) \\ \Rightarrow & \text{grad} & E_y = \vec{\nabla} E_y = i\vec{k} E_y \\ \Rightarrow & \text{grad} & E_z = \vec{\nabla} E_z = i\vec{k} E_z \end{split}$$

Vorsicht! (abgekürzte Schreibweise)

 $\vec{\nabla}\vec{E} = (i\vec{k})\vec{E}$ (kein Skalarprodukt!)

Wirkung des $\vec{\nabla}$ -Operators auf Vektorfelder (\vec{E} -Feld):

$$\vec{\nabla} = i\vec{k}$$

(Wichtiger Zusammenhang in der Quantenmechanik: $-i\hbar \vec{\nabla} = \hbar \vec{k} = \vec{p}$, Impuls; vgl. IV.2)²

 $^{^{2}\}hbar=\frac{h}{2\pi};\,h$ Plancksches Wirkungsquantum

Bilden zeitliche Ableitungen:

$$\begin{split} E_x &= E_{0x} \cdot e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} &= -i\omega E_x, \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -i\omega E_y, \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = -i\omega E_z \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= -i\omega \vec{E} \end{split}$$

Die Wirkung des Operators der räumlichen und zeitlichen Ableitungen:

$$\vec{\nabla} = \text{grad} = i\vec{k}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$$

(Aus der Quantenmechanik: $+i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t} = \hbar\omega = h\nu$, Energie)

$$E = \hbar \omega$$
$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Diese Zusammenhänge aus der Quantenmechanik werden uns noch genauer beschäftigen. Bilden die 2. Ableitungen:

Skalarprodukt!

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} E_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$= \Delta E_x = \text{div grad } E_x$$

$$= -\underbrace{\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)}_{k^2} \cdot E_x$$

$$\implies \Delta \vec{E} = -k^2 \cdot \vec{E}$$

$$\underbrace{\text{div grad } \vec{E}}_{\Delta \vec{E}} - \varepsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -k^2 \vec{E} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E} =$$

$$\Rightarrow k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{\omega^2}{v^2}$$
$$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Wir betrachten Licht: v = c

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \qquad \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Für die Wellengleichung folgt daraus:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \underbrace{-\frac{1}{v^2}}_{-\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Das ist der gesuchte Zusammenhang zwischen $\frac{1}{c^2}$ und $\varepsilon_0\mu_0$. Die Lichtgeschwindigkeit ist mit den elektrischen Feldkonstanten $\varepsilon_0\mu_0$ verknüpft. Das ist ein Hinweis darauf, dass Licht (Photonen) durch \vec{E} – und \vec{B} -Felder zu beschreiben sind:

0

Licht = elektromagnetische Welle = Photonen = \vec{B}, \vec{E} -Felder

Ausbreitung der Wellen

_

Betrachte wieder die MAXWELLschen Gleichungen und die Lösungen:

$$\begin{split} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= i\vec{k} \times \vec{B} = -i\omega \cdot \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{(Verschiebungsstrom, 4. MAXWELLsche Gleichung)} \\ \\ \hline{\Rightarrow} \quad \vec{k} \times \vec{B} &= -\frac{\omega}{c^2} \cdot \vec{E} \\ \\ \text{Beträge:} \quad |\vec{k}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin 90^\circ = \frac{\omega}{c^2} \cdot |\vec{E}| \quad \Rightarrow \quad B = \frac{E}{c} \end{split}$$

(Dreibein; \vec{k} (Ausbreitungsrichtung), \vec{B} , \vec{E} stehen senkrecht aufeinander) Betrachte nun:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega\vec{B} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
 (Induktions
gesetz, 3. MAXWELLsche Gleichung)
 $\Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \omega\vec{B}$

(Dreibein; zeigt die Konsistenz der MAXWELLschen Gleichungen) Beträge:

$$|\vec{k}| \cdot |\vec{E}| \sin 90^{\circ} = \omega \cdot |\vec{B}|$$
$$\implies B = \frac{E}{c}$$

Energie und Impuls einer elektromagnetischen Welle IV.1.3

Jede Welle transportiert Energie, Impuls und Drehimpuls.

Energie einer elektromagnetischen Welle

Die Energiedichte eines elektrischen Feldes:

$$\frac{dE_{\rm el}}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}^2 \qquad (\varepsilon = 1 \text{ für Vakuum})$$

Die Energiedichte eines magnetischen Feldes:

$$\frac{dE_{\rm magn}}{dV} = \frac{1}{2\mu_0\mu_r}\cdot \vec{B}^2 \qquad (\mu_r = 1 \ {\rm für \ Vakuum})$$

Mit $B = \frac{E}{c}$ folgt:

$$\frac{dE_{\text{magn}}}{dV} = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{\vec{E}^2}{c^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2$$
$$\Rightarrow \frac{dE_{\text{magn}}}{dV} = \frac{dE_{\text{el}}}{dV}$$

(der elektrische Energieinhalt einer Welle ist gleich dem magnetischen Energieinhalt)

Gesamtenergie der Welle:

$$\frac{dE_{\text{ges}}}{dV} = \frac{dE_{\text{magn}}}{dV} + \frac{dE_{\text{el}}}{dV} = \varepsilon_0 \vec{E}^2 = \varepsilon_0 \cdot c^2 \cdot \vec{B}^2$$

Die Beträge der \vec{E}, \vec{B} -Felder sind ein anderer Ausdruck für die Energie der elektromagnetischen Welle.

Impuls einer elektromagnetischen Welle

$$\begin{split} E_{\rm ges} &= mc^2, \qquad \vec{p} = m\vec{v} \\ \Rightarrow \ \vec{p} &= \frac{E_{\rm ges}}{c} \cdot \hat{c} \end{split}$$

Impulsdichte:

$$\frac{d\vec{p}}{dV} = \frac{dE_{\rm ges}}{dV} \cdot \frac{\hat{c}}{c} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{c} \cdot \hat{c}$$

Der Impuls zeigt also in die Ausbreitungsrichtung der Welle. Wie können wir \hat{c} ausdrücken?³

$$\hat{c} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{|\vec{E} \times \vec{B}|} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{|\vec{E}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{c(\vec{E} \times \vec{B})}{\vec{E}^2}$$

In oben stehende Gleichung eingesetzt:

$$\frac{d\vec{p}}{dV} = \varepsilon_0 \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$$

(Impulsdichte ausgedrückt durch \vec{E} - und \vec{B} -Felder)

$$\boxed{\frac{dE_{\text{ges}}}{dV} = \varepsilon_0 c \cdot \left| \vec{E} \times \vec{B} \right|} \quad (\text{Energiedichten ausgedrückt durch Betrag von } \vec{E} \times \vec{B})$$

 \Rightarrow Elektromagnetische Wellen sind zu charakterisieren entweder durch ihre Energie und ihren Impuls (Drehimpuls) *oder* durch Angabe ihrer \vec{E} - und \vec{B} -Felder.

IV.1.4 Hertzscher Dipol

 \Rightarrow Dipolschwingungen (Abb. IV.4), Ausbreitungen elektromagnetische Wellen, vgl. auch [6].



Abbildung IV.4: elektrischer Dipol

Dipolmoment π :

 $\vec{\pi}=q\vec{a}$

Dieses Dipolmoment ändert sich harmonisch.

 $\Rightarrow \vec{\pi} = \vec{\pi}_0 \cdot \sin \omega t \quad (\omega \text{ Frequenz der Dipolschwingung})$

Wenn dieser Dipol oszilliert, oszilliert auch das elektrische Feld.

$$\vec{E} = \vec{E}(t)$$
 (zeitlich sich änderndes \vec{E} -Feld)
 \implies
 $Maxwell$
 $\vec{B} = \vec{B}(t)$

 $^{{}^3\}hat{c}\!:$ Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung; $\vec{c}=c\cdot\hat{c}$

Problem der mathematischen Behandlung: endliche Lichtgeschwindigkeitc. Ergebnis:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{\pi}(t)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} + \frac{(\vec{\pi}\hat{r})\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \quad \text{(Fernfeld)}$$

 $\vec{E}=\vec{E}\!\left(\vec{r},t\right)$

 $\vec{r:}$ Vektor zum Aufpunkt.

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\ddot{\pi} \times \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r} \sim \sin\theta \quad (\theta \text{ Polarwinkel})$$

 $Diskutieren \ Ergebnis:$

Berechnen:

$$c(\vec{B} \times \hat{r}) = c \frac{\left(\vec{\pi} \times \hat{r}\right) \times \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r} = -\frac{\hat{r} \times \left(\vec{\pi} \times \hat{r}\right)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} = -\frac{\vec{\pi}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} + \frac{(\hat{r}\vec{\pi})\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} = \vec{E}$$

Hilfsformel: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}.$

$$\Rightarrow \vec{E} = c \left(\vec{B} \times \hat{r} \right)$$

- (1) \vec{E} , \vec{B} , \hat{r} bilden ein Dreibein, stehen also senkrecht aufeinander.
- (2) $\vec{B} = 0$ für $\theta = 0, \pi$ (θ : Polarwinkel, \measuredangle zwischen $\vec{\pi}$ und \hat{r}) $\Rightarrow \vec{E} = 0$ für $\theta = 0, \pi$.
- (3) \vec{B} und \vec{E} schwingen in Phase
- (4) \vec{E} schwingt im Meridian (Längenkreis), \vec{B} schwingt im Breitenkreis
- (5) $|\vec{B}| \propto \sin \theta$

 \vec{r} kann zerlegt werden in eine Komponente in z-Richtung und senkrecht dazu (in x-y–Ebene). Nur Komponente von \hat{r} in x-y–Ebene trägt zum Kreuzprodukt $\vec{B} \sim \vec{\pi} \times \hat{r}$ bei.

 \vec{B} in *x-y*-Ebene (Breitenkreis!)

 $\vec{E} \perp \vec{B}, \hat{r} \Rightarrow$ Schwingung im Meridian

Energiedichte

Wieviel Energie enthält die elektromagnetische Welle pro Volumen?

$$\frac{dE_{\text{ges}}}{dV} = c^2 \varepsilon_0 \vec{B}^2 = \frac{c^2 \varepsilon_0 \pi_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{16 \pi^2 \varepsilon_0^2 c^6 r^2} \cdot \sin^2 \omega t \qquad (\omega \text{ Frequenz des Dipols})$$
$$\Rightarrow \frac{dE_{\text{ges}}}{dV} = \frac{\pi_0^2 \sin^2 \theta}{16 \pi^2 \varepsilon_0 c^4} \cdot \frac{\omega^4}{r^2} \cdot \sin^2 \omega t \propto \frac{\omega^4}{r^2}$$

(Hohe Potenz in ω , Abnahme mit r^2) Mittlere Energiedichte:

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{\int_0^1 \sin^2 \omega t \, dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{2}$$
$$\boxed{\frac{\overline{dE_{\text{ges}}}}{dV}} = \frac{\pi_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^4} \cdot \frac{\omega^4}{r^2}$$

keine Emission in z-Richtung (Richtung des Dipols)



Abbildung IV.5: Dipolschwingung im Raum

IV.2 Fouriertheorem

IV.2.1 Fourieranalyse einer periodischen Bewegung

T Periodendauer, Funktion streng periodisch von $-\infty < t < +\infty$

Theorem: Jede streng periodische Funktion läßt sich nach sin, cos bzw. exp zerlegen.

Übertragung der Eigenschaften der harmonischen Funktionen auf alle streng periodischen Funktionen.

$$x(t) = f(t) = f(t+T)$$
$$x(t) = f(t) = \frac{1}{2} \cdot a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

(endliche oder unendliche Summe; a_n, b_n Amplituden, ω Grundfrequenz, $n\omega$ Oberfrequenzen (Oberschwingungen, "Harmonische"))

Koeffizienten ausrechnen, also a_0, a_n, b_n bestimmen.

multipliziere dazu die FOURIER-Reihe auf beiden Seiten mit $\cos m\omega t$ und integriere von $-\frac{T}{2}$ bis $+\frac{T}{2}$ (1 Periode)

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos m\omega t \, dt = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos m\omega t \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_n \cos n\omega t \cos m\omega t \, dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} b_n \sin n\omega t \cos m\omega t \, dt \right]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot T \cdot a_m$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos m\omega t \, dt$$

 ${\it Ergebnis:}$

Wir können die Amplituden a_m aus der Funktion x(t) bestimmen. (FOURIER-Analyse)

Rechnung skizzieren (a und b sind ganze Zahlen): $a \neq b$:

$$\frac{1}{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ax \cos bx \, dx = \frac{1}{\omega} \left[\frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

 $x = \omega t$, $dx = \omega dt$, Grenzen verändern: $x = \omega \cdot \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} = \pi$ für obere Grenze ($-\pi$ für untere Grenze) a = b:

$$\frac{1}{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ax \, dx = \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \cdot \sin 2ax \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$$

 $a \neq b$:

$$\frac{1}{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \sin ax \cos bx \, dx = 0$$

a = b:

$$\frac{1}{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \sin ax \cos ax \ dx = 0$$

 $a_m = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos m\omega t \, dt$

(Umkehrung der FOURIER-Reihe)

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin m\omega t \, dt$$

Hier wurde die FOURIER-Reihe mit sin $m\omega t$ multiplitiert und von $-\frac{T}{2}$ bis $\frac{T}{2}$ integriert. Durch direkte Integration der FOURIER-Reihe folgt:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

Fassen Sinus und Cosinus paarweise zusammen (1 Term der Reihe):

$$\Rightarrow a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t = c_k \cos(k\omega t + \delta_k)$$

Hilfsformel: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$\Rightarrow a_k = c_k \cos \delta_k, \quad b_k = -c_k \sin \delta_k$$

 $\label{eq:exponentialfunction:} Exponential function:$

$$c_k \cos(k\omega t + \delta_k) = \frac{1}{2} \cdot \left[e^{i(k\omega t + \delta_k)} + e^{-i(k\omega t + \delta_k)} \right] \cdot c_k$$

mit $\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = \cos \alpha$. Neue Amplituden:

$$A_k = \frac{1}{2} \cdot c_k \cdot e^{i\delta_k}$$
$$A_{-k} = \frac{1}{2} \cdot c_k \cdot e^{-i\delta_k}$$
$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot a_0$$

Neue FOURIER-Reihe:

$$x_0 = A_0 + A_1 e^{i\omega t} + A_{-1} e^{-i\omega t} + \cdots$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\omega t}$$

(FOURIER-Reihe in einer symmetrischen Schreibweise)

Umkehrung, FOURIER-Analyse:

$$A_{k} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-ik\omega t} dt, \qquad -\infty < k < +\infty$$
$$A_{0} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

Ergebnis einer FOURIER-Analyse:

diskrete Frequenzen: $\omega,\,2\omega,\,\ldots,\,n\omega,\,\ldots$ mit bestimmten Amplituden

$$\underbrace{a_n, b_n}_{\text{reell}}$$
 bzw. komplexen A_n

 $\label{eq:Linienspektrum} Linienspektrum \; ({\rm Grundfrequenz} \; \omega \; {\rm und} \; {\rm Vielfache} \; {\rm davon})$ FOURIER-Analyse "erschlägt" streng periodische Prozesse; Laufzahl $n.^4$

 $^{^4\}mathrm{sp\"ater}$ werden die Laufzahlen nzu Quantenzahlen



Abbildung IV.6: Beispiel eines Linienspektrums

IV.2.2 Fourierintegral für nichtperiodische Bewegungen

Nicht nur periodische Funktionen, sondern auch nichtperiodische Funktionen können "nach FOURIER" zerlegt werden.

Ergebnis vorweg:

- (1) Aus einer FOURIER-Summe wird ein FOURIER-Integral (oder FOURIER-Transformation)
- (2) Frequenzen $\omega, \ldots, n\omega, \ldots$ sind nicht mehr disktret sondern kontinuierliche Spektrum)⁵

Wir betrachten eine nichtperiodische Funktion (Puls, Wellenzug). (vgl. Abb. IV.7)



Abbildung IV.7: Wellenzug, Puls (quasiperiodisch)

$$x(t) = \begin{cases} a \cdot \sin \omega_0 t & \text{für } t_1 \le t \le t_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Puls; realistisch, weil Emission von Wellen einen Anfang und ein Ende haben muss. \Rightarrow Wellenzüge sind *endlich* in Raum und Zeit.

 \Rightarrow Information kann übertragen werden vom Sender zum Empfänger.

Wie wird aus der FOURIER-Summe in FOURIER-Integral? Plausibilitätsbetrachtung (vgl. Abb. IV.8):



Abbildung IV.8: Einfacher Puls

Wenn jetzt $-\infty \leq t \leq +\infty$ wäre \Rightarrow FOURIER-Analyse ergäbe *eine* Frequenz ω_0 . *Ergebnis:* nach dem "Trick" der Addition von Nullen nach links und rechts \Rightarrow neue Periodendauer $T' = \frac{1}{\nu'} > T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu' < \nu$ Im Grenzübergang $t \to \pm\infty$: keine diskreten Frequenzen mehr, sondern ein Kontinuum von Frequenzen.

$$T \to \infty$$
 bzw. $\nu \to 0 \implies \sum_{\text{Summe} \Rightarrow \text{Integral}} f$

⁵Der Natur "abgelauscht": Sonnenspektrum hat sowohl Linien als auch ein Kontinuum



Abbildung IV.9: Periodische Fortsetzung eines Pulses

$$\underbrace{\sum_{k \text{ ganze Zahlen}} A_k e^{ik\omega t}}_{k \text{ ganze Zahlen}} \to \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega}_{\substack{\text{kein Platz für} \\ \text{die Laufzahl} k}}$$

 $\mathit{Umkehrung}$ führte auf Amplituden A_k

$$A_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-ik\omega t} dt$$

Ergebnis:

$$x = f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$
$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad \text{(FOURIER-Transformation)}$$

Warum ist das von physikalischem Interesse?

Beispiel: (Spektrale Zerlegung eines nichtperiodischen Vorgangs)



Abbildung IV.10: quasimonochromatischer Puls

 Δt endlich; Wellenzug, Puls quasimonochromatisch. (vgl. Abb. IV.10) Sinusfunktion (quasiperiodisch):

$$x = f(t) = \begin{cases} A \cdot e^{i\omega_0 t} & -\frac{\Delta t}{2} \le t \le \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\Rightarrow a(\omega) = \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} A \cdot e^{i\omega_0 t} \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} A e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt$$
$$= \frac{A}{i(\omega_0 - \omega)} \cdot \left[e^{i(\omega_0 - \omega)\frac{\Delta t}{2}} - e^{-i(\omega_0 - \omega)\frac{\Delta t}{2}} \right]$$

Mit $\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \sin \alpha$ folgt:

$$a(\omega) = \frac{2A}{\omega_0 - \omega} \cdot \sin\left[(\omega_0 - \omega) \cdot \frac{\Delta t}{2}\right] = A\Delta t \cdot \left[\frac{\sin(\omega_0 - \omega)\frac{\Delta t}{2}}{(\omega_0 - \omega)\frac{\Delta t}{2}}\right]$$

$kontinuier liches\ Frequenzspektrum$

Ergebnisse der Kurvendiskussion: (setzen $x = \frac{\omega_0 - \omega}{2} \cdot \Delta t$)

- (1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $x \to 0$: für $\omega_0 = \omega \Rightarrow a(\omega_0) = A \cdot \Delta t$ (endlich)
- (2) Nullstellen für $x = (\omega_0 \omega) \cdot \frac{\Delta t}{2} = \pm \pi, \pm 2\pi$ (x = 0 ausgeschlossen)
- (3) Maxima nehmen ab, umgekehrt proportional zu ω (ω steht im Nenner)
- (4) Oszillierende Funktion $\propto \sin$

(vgl. Abb. IV.11)



Abbildung IV.11: kontinuierliches Frequenzspektrum

Bereich Δx enthält die wesentlichen (häufigen) Frequenzen Frequenzband $\Delta x = x - (-x) = 2x$.

$$\Delta x = 2x = 2 \cdot \frac{\overbrace{\omega_0 - \omega}^{\Delta \omega}}{2} \cdot \Delta t \cong 2\pi$$

(Breite des Frequenzspektrum, das nicht "wegoszilliert")

$$\begin{split} \Delta \omega \cdot \Delta t &\approx 2\pi \\ \Delta \nu \cdot \Delta t &\approx 1 \end{split}$$

(Unschärfebeziehung)

Die Zeitdauer Δt des quasimonochromatischen Wellenzugs bestimmt die Breite des Frequenzspektrums. Die Zeitdauer Δt und das Frequenzband $\Delta \nu$ sind korreliert.

 $\Delta t \to \infty \Rightarrow \Delta \nu = \nu_0 - \nu = 0 \Rightarrow \nu_0 = \nu$ (1 Term in FOURIER-Reihe)

räumliche Zerlegung (x Raumkoordinate)

$$y = f(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} a(k) \cdot e^{ikx} dk \qquad (k \text{ ist Wellenzahl, nicht Laufzahl})$$

Umkehrung im Raum:

$$a(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ikx} \, dx$$

3-dimensional:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} a(\vec{k}) \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$$
$$\underbrace{\sum_{-\infty}}_{3\text{-faches Integral}} a(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}) \cdot e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r}$$

Unschärfebeziehung ($\Delta \nu$, $\Delta \omega$, Δk_x , Δk_y , Δk_z interpretieren als Varianzen, "Fehler")

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta k_x &\approx 2\pi \\ \Delta y \cdot \Delta k_y &\approx 2\pi \\ \Delta z \cdot \Delta k_z &\approx 2\pi \\ \Delta t \cdot \Delta \omega &\approx 2\pi \end{aligned} \\ (\Rightarrow \ \Delta \vec{r} \Delta \vec{k} \approx 2\pi) \end{aligned}$$

 $J_{-\infty}$

Ausflug in die Quantenphysik (multiplizieren $\Delta t \Delta \omega \approx 2\pi$ mit \hbar):

 $\Delta(\hbar\omega) \cdot \Delta t \approx 2\pi\hbar = h$ (wobei $\hbar\omega = E$, Energie)

 $\Rightarrow \Delta E \Delta t \sim h \qquad (\text{HEISENBERG'sche Unschärfebeziehung für Energie und Zeit})$ (vgl. Abb. IV.12)



Abbildung IV.12: Wechselwirkung durch Energie- und Impulsaustausch

$$\begin{split} \Delta x \cdot \Delta k &\approx 2\pi \\ \Delta x \cdot \Delta (\hbar k_x) &\approx 2\pi \hbar, \quad \hbar k_x = p_x \\ \hline \Delta x \cdot \Delta p_x &\approx h \end{split} \qquad (\text{HEISENBERG'sche Unschärfebeziehung für Ort und Impuls}) \end{split}$$

Korrelation zwischen

Frequenz ω und Zeit t

Wellenzahl k (\vec{k}) und Ort x (\vec{r})

Zeitdauer und Frequenzband sind verknüpft, Wellenzahlbreite und Ortsbreite 6 sind verknüpft.

⁶räumliche Ausdehnung des Wellenzugs

IV.3 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

streng periodische Funktion: $v = \frac{\omega}{k} = \lambda \cdot \nu$

 $v_{\rm Ph} =$ Phasengeschwindigkeit

endliche Wellenzüge (in Zeit und Raum):



Abbildung IV.13: endlicher Wellenzug

Frage: Wie groß ist die Geschwindigkeit des Wellenzuges (Wellenpaketes) v_g = Gruppengeschwindigkeit? Was passiert, wenn nach der FOURIER-Zerlegung die verschiedenen FOURIER-Komponenten verschiedene Phasengeschwindigkeiten haben? Wie groß ist die Geschwindigkeit des ganzen Wellenpaketes?

 $v_g \stackrel{?}{=} v_{\rm Ph} = \frac{\omega}{k}$ (gilt für eine FOURIER-Komponente)

Modell: 2 Frequenzen sollen im Paket enthalten sein (in Wirklichkeit unendlich viele) $\omega \approx \omega'$, gleiche Amplitude

$$\xi = \xi_0 \cdot \sin(kx - \omega t) + \xi_0 \sin(k'x - \omega' t)$$

Mit $\sin x + \sin y = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ folgt:

$$\xi = 2\xi_0 \cdot \sin\frac{1}{2} \left[(k+k')x - (\omega+\omega')t \right] \cdot \cos\frac{1}{2} \left[(k-k')x - (\omega-\omega')t \right]$$
$$= 2\xi_0 \cdot \sin(kx - \omega t) \cdot \cos\left[\frac{1}{2} (\Delta k)x - (\Delta \omega)t\right]$$

mit $k + k' \approx 2k$, $\omega + \omega' \approx 2\omega$ bzw. $\Delta k = k - k'$ und $\Delta \omega = \omega - \omega'$ Ergebnis: Schwebung (Abb. IV.14)



Abbildung IV.14: Schwebung

Modulierte Schwingung entspricht einer harmonischen Welle, die sich mit folgender Geschwindigkeit bewegt:

$$v_g(k) = \frac{\omega' - \omega}{k' - k} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \longrightarrow \frac{d\omega}{dk}$$

Der Differentialquotient $\frac{d\omega}{dk}$ ist die Gruppengeschwindigkeit. (Phasengeschwindigkeit jeder einzelnen FOU-RIER-Komponente: $\frac{\omega}{k} = v_{\rm Ph}$)

Berechnen $\frac{d\omega}{dk}$:

 $\omega = k \cdot v(k)$

 $(v \text{ ist nicht mehr konstant, sondern hängt ab von Wellenzahl } k \text{ bzw. Wellenlänge } \lambda \text{ oder Frequenz } \nu)$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_{\rm Ph} + k \cdot \frac{dv_{\rm Ph}}{dk}$$
$$v_g \neq v_{\rm Ph}, \text{ wenn } \frac{dv_{\rm Ph}}{dk} \neq 0$$

Das heisst: Wenn sich die FOURIER-Komponenten mit verschiedener Geschwindigkeit ausbreiten.

Beispiel: Licht im Vakuum: v = c unabhängig von der Frequenz ν , Wellenlänge λ $(k = \frac{2\pi}{\lambda})$ \Rightarrow keine Dispersion⁷ im Vakuum $\Rightarrow v_g = v_{\text{Ph}}$ Wenn $v_{\text{Licht}} = \frac{c}{n}$ (im Medium) und $n = n(\lambda)$:

 $\Rightarrow v_g \neq v_{\rm Ph}$

n ist der Brechungsindex. Er ist im Medium abhängig von der Wellenlänge λ bzw. der Frequenz ν .

$$\frac{dv_{\rm Ph}}{dk(\lambda)} = \frac{dv_{\rm Ph}}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk}$$

Mit $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2}$

$$\Rightarrow v_g = v_{\rm Ph} + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{dv_{\rm Ph}}{d\lambda} \cdot \left(-\frac{\lambda^2}{2\pi}\right) = v_{\rm Ph} - \lambda \cdot \frac{dv_{\rm Ph}(\lambda)}{d\lambda}$$

Mit $v_{\rm Ph} = \frac{c}{n(\lambda)}$:

$$v_g = \frac{c}{n} + \frac{c\lambda}{n^2} \cdot \frac{dn(\lambda)}{d\lambda}$$

Letzteres folgt aus:

$$\frac{dv_{\rm Ph}}{d\lambda} = \frac{dv_{\rm Ph}}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$
 und $\frac{dv_{\rm Ph}}{dn} = -\frac{c}{n^2}$



Abbildung IV.15: Brechung von Licht im Prisma

IV.4 Interferenz und Beugung

IV.4.1 Reflexion und Brechung von Wellen

Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen ist keine Konstante, sondern hängt vom Medium ab:



Abbildung IV.16: Reflexion und Brechung

- Licht hat eine konstante Geschwindigkeit im Vakuum: c
- Licht im Medium: $v = \frac{c}{n}$. *n* ist der *Brechungsindex*, charakteristisch für Materialien. \Rightarrow führt auf Reflexion und Brechung der Wellen.

Empirisch findet man:

(1) Die Wellenzahlvektoren $\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_b$ liegen in einer Ebene (Papierebene), die senkrecht zur Grenzfläche orientiert ist und daher den Normalenvektor der Grenzfläche enthält.

(2) Einfallswinkel = Reflexionswinkel

(3)

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_b} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

(SNELLIUSsches Brechungsgesetz)

2 Fälle:



Abbildung IV.17: Mögliche Brechungsarten

⁷, "Auseinanderlaufen der Welle"; $\frac{dv_{\rm Ph}}{dk}$

Wenn $n_{21} < 1$ ist $(n_2 < n_1)$, kann die sog. *Totalreflexion* eintreten., d.h. es gibt keinen gebrochenen Strahl mehr \Rightarrow kein Eintritt der Welle in das "dünnere" Medium. (sin $\theta_b = 1$, $\theta_b = 90^\circ$)

$$\underbrace{\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_b}}_{=1} = \sin \theta_i = n_{21} = \sin \theta_T$$

 $\theta_T:$ Grenzwinkel der Totalreflexion

Begründung der genannten Tatsachen



Abbildung IV.18: Brechung und die auftretenden Winkel

Reflexion

Zeit t, die die einfallende Welle braucht, um von B nach B' zu kommen, muss gleich der Zeit sein, um von A nach A' zu kommen. (gleiches Medium, gleiche Geschwindigkeit)

$$AA' = v_1 t \qquad BB' = v_1 t$$

$$\sin \theta_i = \frac{BB'}{AB'} = \frac{v_1 t}{AB'}$$
$$\sin \theta_r = \frac{AA'}{AB'} = \frac{v_1 t}{AB'}$$
$$\sin \theta_r = \sin \theta_i \implies \theta_r = \theta_i$$

Brechung

$$BB' = v_1 t \qquad AA'' = v_2 t$$

$$\sin \theta_i = \frac{v_1 t}{AB'}, \qquad \sin \theta_b = \frac{AA''}{AB'} = \frac{v_2 t}{AB'}$$

$$\boxed{\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_b} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}}$$

mit $v_i = \frac{c}{n_i}$.

IV.4.2 Der Doppler-Effekt

Frequenzverschiebung bei bewegter Quelle oder/und bei bewegtem Empfänger.

qualitative Betrachtung:



Abbildung IV.19: Ausbreitung einer Welle im ruhenden Medium



Abbildung IV.20: Wellenausbreitung bei bewegter Quelle

Quelle ruht, Frequenz $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$, Ausbreitungsgeschwindigkeit im ruhenden Medium v. (vgl. Abb. IV.19) Quelle bewegt sich mit v_Q . (vgl. Abb. IV.20)

$$T = \frac{(v - v_Q) \cdot T_0}{v}$$
$$\frac{1}{T} = \nu = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_Q) \cdot T_0} = \nu_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{v}}$$

Die Quelle mit Geschwindigkeit v_Q holt während einer Periode T_0 die abgelöste Wellenfront teilweise wieder ein, wodurch sich die Wellenlänge auf $\lambda' = (v - v_Q) \cdot T_Q$ verkürzt.

Frequenz von ruhender Quelle: ν_0 Ausbreitungsgeschwindigkeit im ruhenden Medium: vGeschwindigkeit der Quelle: v_Q Geschwindigkeit des Empfängers: v_B (vgl. Abb. IV.21)



Abbildung IV.21: Bewegter Sender und Empfänger

Zum Zeitpunkt t = 0 wird bei A Welle emittiert und erreicht den Beobachter zur Zeit t. In der Zeit t bewegt sich der Beobachter um $v_B \cdot t$. Die Welle hat den Weg $l + v_B \cdot t$ bis zum Beobchter zurückgelegt. Wann erreicht der erste Wellenzug den Beobachter?

$$\Rightarrow v \cdot t = l + v_B \cdot t$$
$$\Rightarrow t = \frac{l}{v - v_B}$$

Zweiter Wellenzug zum Zeitpunkt T_0 emittiert:

 t^\prime Zeit von Quelle zum Beobachter für den zweiten Wellenzug.

$$\Rightarrow vt' = l + v_B t' + (v - v_Q) \cdot T_0$$
$$\Rightarrow t' = \frac{l + (v - v_Q) \cdot T_0}{v - v_B}$$
$$\Rightarrow t' - t = T = \frac{v - v_Q}{v - v_B} \cdot T_0$$
$$\nu_0 = \frac{1}{T_0}, \quad \nu = \frac{1}{T}$$
$$\Rightarrow \nu = \nu_0 \cdot \frac{v - v_B}{v - v_Q} = \boxed{\nu_0 \cdot \frac{1 - \frac{v_B}{v}}{1 - \frac{v_Q}{v}}}$$

nur bewegte Quelle $(v_B = 0)$:

$$\nu = \nu_0 = \frac{1}{1 \mp \frac{v_Q}{v}}$$

 (Minuszeichen: Quelle nähert sich; Pluszeichen: Quelle entfernt sich) Mit $v_Q \ll v$:

$$\nu \approx \nu_0 \cdot \left(1 \pm \frac{v_Q}{v}\right)$$

nur bewegter Beobachter ($v_Q = 0$):

$$\nu \approx \nu_0 \cdot \left(1 \pm \frac{v_B}{v}\right)$$

 (Pluszeichen: Beobachter nähert sich; Minuszeichen: Beobachter entfernt sich) Mit $v_Q, v_B \ll v$:

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{1 - \frac{v_B}{v}}{1 - \frac{v_Q}{v}} \approx \nu_0 \cdot \left(1 - \frac{v_B}{v}\right) \cdot \left(1 + \frac{v_Q}{v}\right)$$
$$\nu = \nu_0 \cdot \left(1 + \frac{v_Q}{v} - \frac{v_B}{v} - \frac{v_B v_Q}{v^2}\right) \approx \nu_0 \cdot \left(1 + \frac{v_Q}{v} - \frac{v_B}{v}\right)$$

Relativgeschwindigkeit $v_{\rm rel} = v_B - v_Q$:

$$\nu = \nu_0 \cdot \left(1 - \frac{v_{\rm rel}}{v}\right)$$
$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = 1 - \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{v_{\rm rel}}{v}$$

 $\Delta \nu = \nu_0 - \nu$:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{v_{\rm rel}}{v} \qquad (relative Frequenzänderung, DOPPLER-Verschiebung)$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{v_{\rm rel}}{v} \cdot \cos\theta \qquad (\text{vgl. Abb. IV.22})$$



Abbildung IV.22: DOPPLER-Verschiebung bei nichtparallelen Bewegungsrichtungen

Machscher Kegel

bisher: $v_Q < v$ für $v_Q > v$: $\sin \theta = \frac{v}{2}$ (vgl. Abb

$$\sin \theta = \frac{v}{v_Q}$$
 (vgl. Abb. IV.23)

MACH
sche Zahl: $\frac{v}{v_Q}$ für $v=v_Q,$ siehe Abb. IV.24.



Abbildung IV.23: MACHscher Kegel



Abbildung IV.24: MACH
scher Kegel für $v=v_Q$

Machscher Kegel bei Lichtwellen (Cerenkov-Strahlung)

Geladenes Teilchen emittiert Licht wenn: $v_Q > v = \frac{c}{n}$ Lichtgeschwindigkeit im Vakuum: cLichtgeschwindigkeit im Medium: $v = \frac{c}{n}$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{c}{n \cdot v_Q}$$

Bewegter Beobachter und bewegte Quelle im Vakuum

Der Unterschied zwischen bewegtem Beobachter und bewegter Quelle ist bei elektromagnetischen Wellen im Vakuum nicht vorhanden.

$$\nu = \nu_0 \cdot \sqrt{\frac{1 \mp \frac{v_r}{c}}{1 \pm \frac{v_r}{c}}}$$

(obere Vorzeichen: Quelle bewegt sich vom Beobachter weg, untere Vorzeichen: Beobachter bewegt sich auf die Quelle zu.)

 $\boldsymbol{v_r}:$ relative Geschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter

Für
$$v_r \ll c$$
:

$$\nu \approx \nu_0 \cdot \sqrt{\left(1 \mp \frac{v_r}{c}\right) \cdot \left(1 \mp \frac{v_r}{c}\right)}$$
$$\nu = \nu_0 \cdot \left(1 \mp \frac{v_r}{c}\right)$$
$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\Delta v}{c}$$

Beispiel zum DOPPLER-Effekt: Rotverschiebung bei Galaxien



Abbildung IV.25: angeregte Zustände des Wasserstoff-Atoms



Abbildung IV.26: Spektrallinien, Intensitäten

Beobachtung:



Abbildung IV.27: DOPPLER-Verschiebung der Spektrallinien

- alle Galaxien bewegen sich radial von "uns" fort.
- $\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{v}{c} \Rightarrow v$
- Der Abstand r zwischen der Erde und der Galaxie ist umso größer je größer $\Delta \nu$ oder v ist.

$$v_Q = Hr$$
 (*H*: HUBBLE-Konstante)



Abbildung IV.28: Beobachtung von HUBBLE

Deutung von H: Urknall vor der Zeit t.



Obwohl alle kosmischen Objekte sich von uns entfernen, sind wir nicht im Zentrum des Universums.

Abbildung IV.29: Drift der Galaxien nach dem Urknall

$$\vec{r_E} = \vec{r_Q} - \vec{r_0} = \underbrace{(\vec{v_Q} - \vec{v_0})}_{\vec{v_E}} \cdot t$$

$$\frac{\vec{r_E}}{\vec{v_E}} = \frac{\vec{r_Q} - \vec{r_0}}{\vec{v_Q} - \vec{v_0}} = t \\
\vec{v_E} = H \cdot \vec{r_E}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{H}$$

$$\frac{1}{H} = t = 1, 3 \cdot 10^{10} a \qquad \text{(ohne Gravitation!)}$$

Mit Gravitation:

 $m: {\rm Masse}$ einer Galaxie

M: Gesamtmasse aller Galaxien innerhalb einer Volumens einer Kugel mit dem Radius R)



Abbildung IV.30: Flucht der Galaxien unter Berücksichtigung der Masse

Frage: Dehnt sich das Universum immer weiter aus, oder reicht die Gravitation aus, das Universum wieder kollabieren zu lassen?

Bestimmung der Fluchtgeschwindigkeit:

$$\begin{split} W &= W_{\rm kin} + W_{\rm pot} \\ W &= \frac{1}{2} \cdot m v_Q^2 - \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{R} \\ \Rightarrow & 0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_Q^2 - \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{R} \\ v &= H \cdot R \\ \frac{R^2 \cdot H^2}{2} &= \frac{\gamma \cdot M}{R} \quad \Rightarrow \quad R^3 = \frac{2\gamma \cdot M}{H^2} \end{split}$$

 $M_{\rm krit}:$ kritische Masse, bei der das Universum zum Stillstand kommt.

$$\varrho_{\rm krit} = \frac{M_{\rm krit}}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{3H^2}{8\pi\gamma} = 10^{-26} \, \frac{\rm kg}{\rm m^3}$$



Abbildung IV.31: Immerwährende Expansion oder immer wieder ein "Urknall"?

IV.4.3 Superposition (Interferenz) von Wellen

IV.4.3.1 Interferenz von Wellen, die von zwei in fester Phasenbeziehung zueinander schwingenden Wellen erzeugt werden

1. Punktquelle (\Rightarrow Kugelwelle):

$$\xi_1(r_1, t) = \frac{A_1}{r_1} \cdot \sin(kr_1 - \omega t)$$
$$= \frac{A_1}{r_1} \cdot \sin(\omega t \underbrace{-kr_1 + \pi}_{\delta_1})$$

(Erinnerung an Schwingungen: $\sim \sin(\omega t + \delta_1)$) 2. Punktquelle:

$$\xi_2(r_2, t) = \frac{A_2}{r_2} \cdot \sin(\omega t \underbrace{-kr_2 + \pi}_{\delta_2})$$

Idee: Umschrift der Welle, die es erlaubt, die früher hergeleiteten Beziehungen für Schwingungen zu verwenden.

Überlagerung von ξ_1 und ξ_2 :

$$\xi(r_1, r_2, t) = \xi_1(r_1, t) + \xi_2(r_2, t)$$

Bei der Überlagerung von Schwingungen (III.2) gilt für die resultierende Amplitude:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\delta_1 - \delta_2)}$$

entstanden aus $x_i(t) = a_i \cdot \sin(\omega t + \delta_i)$ Für unsere Wellen gilt:

$$\delta_1 = -kr_1 + \pi, \qquad \delta_2 = -kr_2 + \pi$$

Phasenunterschied:

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = k(r_1 - r_2)$$

 $r_1 - r_2$: Gangunterschied a liegt in den Grenzen:

 $a_1 - a_2 \le a \le a_1 + a_2$

(1) konstruktive (verstärkende) Interferenz:

 $\cos \delta = 1, \quad \delta = 2n \cdot \pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(maximale Verstärkung)

(2) destruktive (abschwächend) Interferenz:

 $\cos \delta = -1, \quad \delta = (2n+1) \cdot \pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(maximale Abschwächung)

Wenn $a_1 = a_2$ gilt \Rightarrow totale Auslöschung oder Verdopplung der Amplitude

Ergebnis:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (r_1 - r_2) = \begin{cases} 2n \cdot \pi & \text{Verstärkung (Bäuche)} \\ (2n+1) \cdot \pi & \text{Abschwächung (Knoten)} \end{cases}$$

(δ : Phasenunterschied)

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} n \cdot \lambda = 0, \pm \lambda, \pm 2\lambda, \dots & (\text{Verstärkung})\\ (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{2} = \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \frac{3\lambda}{2}, \dots & (\text{Abschwächung}) \end{cases}$$

Geometrische Darstellung:

Hyperbel in der Ebene; hyperbolische Rotationsfläche im Raum (Hyperboloid)

Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller der Punkte, für die die Differenz der Abstände $(r_2 - r_1)$ von zwei festen Brennpunkten konstant ist.

Dieses Superpositionsbild (Interferenzbild) entsteht nur dann, wenn die zu überlager
nde Wellen eine Phasenbeziehung haben: $\delta=\delta_2-\delta_1$

Solche Wellen heißen kohärent, und nur für diese gibt es Interferenz.

Laser erzeugen immer kohärentes Licht. Glühlampen erzeugen kein kohärentes Licht. (siehe VIII)

Realisierung zweier kohärenter Wellen durch den Doppelspalt (YOUNGscher Versuch, klassische Interferenz)

Frage: Wie sieht das Interferenzmuster zweier synchron schwingender (kohärenter) Quellen aus? (siehe Abb. IV.32)

Gangunterschied: $r_1 - r_2 = a \cdot \sin \theta$ Phasenunterschied: $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin \theta$

Maximale Intensität für $\delta=2n\cdot\pi$

 $\Rightarrow n\lambda = a \cdot \sin \theta$

Unter diesen Winkeln θ finden wir Maxima der Intensität. $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

IV.4.3.2 Interferenz von N Quellen mit fester Phasenbeziehung

Phasendifferenz: $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \sin \theta$

Beispiel für N = 4:

Hauptmaxima: $a \sin \theta = n\lambda$ 3 Nullstellen (min. Amplitude): $\delta = \frac{\pi}{2}$, $\delta = \pi$, $\delta = \frac{3\pi}{2}$ bzw. $4\delta = 2\pi$, $4\delta = 4\pi$, $4\delta = 6\pi$ usw. Maxima: $\delta = 0, 2\pi, \ldots$

Allgemein:

Nullstellen $N\delta = 2n' \cdot \pi$ für N = 4: $n' = \pm 1 \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{-1}$

$$n' = \pm 1 \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2}$$
$$n' = \pm 2 \Rightarrow \delta = \pi$$
$$n' = \pm 3 \Rightarrow \delta = \frac{3\pi}{2}$$
$$n' = \pm 4 \Rightarrow \text{Maximum}$$



Abbildung IV.32: Interferenz zweier synchron schwingender Quellen
Hauptmaxima: $n' = 0, \pm 4, \pm 8$ Nullstellen: $n' = \pm 1, \dots, \pm (N-1), \pm (N+1), \dots, \pm (2N-1)$

Nebenmaxima: zwischen Nullstellen

 \Rightarrow Richtcharakteristik (Peilsender): Sender (Empfänger), die in eine bestimmte Richtung emittieren mit maximaler Intensität.

auch angewandt bei der Radiointerferometrie

Beispiel: N = 4

 $a\sin\theta = n\lambda$ Setzen: $a = \frac{\lambda}{2} \implies \sin\theta = 2n$

Hauptmaximum ist nur für n = 0 möglich $(n = 1 \Rightarrow \sin \theta = 2)$

$$\sin \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0, \ \pi$$

Knoten: $\sin \theta = \frac{n'}{2}$

$$n' = \pm 1 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{6}$$

 $n' = \pm 2 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}$

IV.4.3.3 Stehende eindimensionale Wellen



Abbildung IV.33: Einfallende, reflektierte und daraus resultierende stehende Welle

 \longleftarrow einfallende ebene Welle:

 $\xi_1 = A_1 \cdot \sin(kx + \omega t)$

 \longrightarrow reflektierte Welle

$$\xi_2 = A_2 \cdot \sin(kx - \omega t)$$

Überlagerung:

 $\xi = \xi_1 + \xi_2 = A_1 \cdot \sin(kx + \omega t) + A_2 \cdot \sin(kx - \omega t)$

Randbedingung: x = 0: $\xi(x = 0) = 0$

 $\xi(x=0) = A_1 \cdot \sin(\omega t) + A_2 \sin(-\omega t) \quad \Rightarrow \quad A_1 = A_2 = A$

(reflektierte Welle mit gleicher Amplitude wie einfallende Welle)

$$\xi(x,t) = A \cdot \left[\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)\right]$$
$$= A \cdot \left[\sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx + \pi)\right]$$

 \Rightarrow Phasensprung von π (180°) be
ix=0als Folge der Randbedingung Mit $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ folgt:

$$\Rightarrow \xi(x,t) = 2A \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \boxed{2A \cdot \sin(kx) \cdot \cos(\omega t)}$$

Ergebnis: separierte Variable (x und t)

(fortschreitende Welle ist aber: $\xi(x \pm vt)$)

 \Rightarrow Es tritt keine Wellenausbreitung auf!

Randbedingung $(\xi(x=0)=0)$ führt auf "stehende Wellen".

Die Amplitude von $\xi(x, t)$ ist durch den Ort x festgelegt und ändert sich zeitlich harmonisch. Die Amplitude dieser stehenden Welle $2A\sin(kx)$ ist

(1) = 0 für $kx = n \cdot \pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \cdot n\lambda = \underbrace{2n}_{\text{gerade}} \cdot \frac{\lambda}{4}$$

,Knoten" = Nullstellen

(2) maximal für $kx = n\pi + \frac{\pi}{2}$

$$x_B = \frac{1}{2} \cdot n\lambda + \frac{\lambda}{4} = \underbrace{(2n+1)}_{\text{ungerade}} \cdot \frac{\lambda}{4}$$

"Bäuche"

Knoten und Bäuche folgen im $\frac{\lambda}{2}$ -Abstand

 \Rightarrow "stationäre" Zustände der Atome



Abbildung IV.34: Stehende Welle bei 2 festen Enden

Eingespannte Saite 2. Randbedingung $\xi(x = L) = 0$

 $kL = n\pi \quad \Rightarrow \quad L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$

L definiert die "Eigenschwingung" einer eingespannten Saite (Musikinstrumente).

stehende Wellen auf dieser Saite:

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$
 (Frequenzspektrum mit $n = 1, 2, ...$)

 $\lambda_i:$ Eigenwerte der eingespannten Saite (Eigenschwingungen, Eigenfrequenzen), charakterisiert durch eine Laufzahln.

$$\begin{split} \lambda &= \frac{2L}{n} = 2L, \ \frac{2L}{2}, \ \frac{2L}{3}, \dots \\ \nu &= \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L} = \frac{v}{2L}, \underbrace{\frac{2v}{2L}, \ \frac{3v}{2L}, \dots}_{\text{Oberfrequenzen}} \end{split} \qquad (v: \text{Schallgeschwindigkeit}) \end{split}$$

Wellenfunktion, Eigenzustände, Eigenfunktionen des Eigenwertproblems:

$$\xi_n = 2A \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) \cdot \cos(\omega t)$$
$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

(siehe Abbildungen IV.35–IV.37)



Abbildung IV.35: n = 1: Grundfrequenz



Abbildung IV.36: n = 2: erster angeregter Zustand



Abbildung IV.37: n = 3: zweiter angeregter Zustand

IV.4.3.4 Zwei- und dreidimensionale stehende Wellen, Resonatoren

 $\begin{array}{l} \textit{Beispiel: Eine Membran wird über einen Rahmen (Rechteck) gespannt. \Rightarrow Frage nach den Eigenwerten und Eigenfunktionen. (\Rightarrow Eigenwertproblem) \end{array}$

 $\Rightarrow \xi(\text{Rand}) = 0$



Abbildung IV.38: eingespannte Membran

x-Richtung:

$$k_x \cdot a = n_x \cdot \pi$$

y-Richtung:

$$k_y \cdot b = b_y \cdot \pi$$

2 unabhängige Laufzahlen $n_x, n_y = 1, 2, \ldots$

$$x: \quad k_x = \frac{n_x \cdot \pi}{a}, \qquad \nu_x = \frac{v}{\lambda_x} = \frac{k_x \cdot v}{2\pi}$$
$$y: \quad k_y = \frac{n_y \cdot \pi}{a}, \qquad \nu_y = \frac{n_y \cdot v}{2b}$$
$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \pi \cdot \sqrt{\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2}} \qquad \text{keine ganzzahligen Vielfache}$$

3-dimensional: Hohlraumresonatoren (z.B. Geigenkörper, Abb. IV.39)



Abbildung IV.39: Hohlraumresonator

Bestimmung der Eigenfrequenzen:

$$k = \pi \cdot \sqrt{\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}}$$
$$\nu = \frac{v}{2} \cdot \sqrt{\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}}$$

(kompliziertes Spektrum)

Anwendung: supraleitende Resonatoren (beschichteter Hohlkörper)

IV.4.4 Beugung von Wellen

Wiederholung: Wo stehen wir in unserer Kenntnis der Wellen?

(1) Unschärfebeziehungen (FOURIER-Analyse; Abb. IV.40)

lokalisiertes Wellenpaket = Puls in Raum und Zeit; Idee von einem "Teilchen"

 $\Delta\omega\,\Delta t \sim 2\pi, \qquad \Delta k\,\Delta x \sim 2\pi$

(2) Zusammenhang zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (Abb. IV.41)

$$v_g = v_{\rm Ph} + k \, \frac{dv}{dk} = \frac{d\omega}{dk}$$

 \Rightarrow Gruppengeschwindigkeit = klassische Teilchengeschwindigkeit (später!)

- (3) DOPPLER-Effekt
- (4) Reflexion, Brechung, Totalreflexion
- (5) Interferenz (Superposition) von Wellen, Doppelspalt, N Spalte \Rightarrow Gitter (RÖNTGEN-Spektroskopie)
- (6) Spektren (FOURIER-Analyse \sim diskrete Spektren und kontinuierliche Spektren)
- (7) Eigenwertprobleme (Eigenwerte \sim diskrete Spektren, Frequenzen), Eigenfunktionen

Interferenz und Beugung sind 2 verschiedene Dinge:

Beispiel: 2 synchron schwingende Quellen (auch im Vakuum!) erfordert keine zusätzlichen Gegenstände (Blenden, Hindernisse). (siehe Abb. IV.32)

 $\Rightarrow {\rm Interferenz}$

Das Phänomen der *Beugung* setzt Hindernisse voraus (Blenden, Spalte, Streukörper), von der Interferenz unabhängiges Phänomen.



Abbildung IV.40: Unschärfebeziehungen



Abbildung IV.41: Phasen- und Gruppengeschwindigkeit







Abbildung IV.43: Beugung einer Welle an der Blende

Meistens treten Beugung und Interferenz gemeinsam auf.

HUYGENS*sches Prinzip:* Jeder Punkt einer Wellenfront (oder Wellenfläche) ist Quelle einer Kugelwelle (Sekundärwelle), die sich um das Hindernis herum ausbreitet. Wellenfronten sind Punkte gleicher Phase. Im Falle der ebenen Welle:

$$\xi(\vec{r},t) = \xi_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

Die Phase $\vec{k}\vec{r} - \omega t$ ist konstant.



Abbildung IV.44: Wellenfront mit Elementarwellen nach HUYGENS

 $\label{eq:Kirchhoff} \mbox{Kirchhoff} sches \mbox{$Prinzip:$ Verallgemeinerung des Huygenssches Prinzip, setzt keine schwingende Materie voraus.}$

 $\Rightarrow {\rm Abstrahierung}$



Abbildung IV.45: Auslaufende (gebeugte) Welle, betrachtet am Punkt ${\cal P}$

Amplitude der auslaufenden Welle (vgl. Abb. IV.45):

$$\xi(P) = \int \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r}}_{\substack{Kugel-\\welle}} \cdot \cos\left(\hat{n}, \vec{r}\right) \cdot \xi_e \, \vec{dA} \qquad (\text{KIRCHHOFFsches Beugungsintegral})$$

 \vec{dA} ist Flächenelement des Hindernisses = $r^2\,d(\cos\theta)\,d\phi$
 ξ_e ist die einlaufende Welle

\Rightarrow Näherungslösungen

Das KIRCHHOFFsche Beugungsintegral macht uns unabhängig von der Vorstellung schwingender Materieteilchen \Rightarrow auch für elektromagnetische Wellen anwendbar.

IV.4.4.1 Beugung am Spalt



Abbildung IV.46: Beugung am Spalt

 θ : Ablenkwinkel

b: Spaltbreite

Frage: Wie sieht das Beugungsbild aus?

Behauptung: Es gibt minimale Intensität (maximale Auslöschung) für:

 $b \cdot \sin \theta = n \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad \text{Auslöschung unter dem Winkel } \theta$

 $n = \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0$ ausgeschlossen ($\theta = 0$: Beleuchtungsmaximum)

Das ist eine ähnliche Formel, wie wir sie für 2 synchron schwingende Quellen hatten (ohne an Beugung zu denken). Dort treten Maxima auf für:

 $a \cdot \sin \theta = n \cdot \lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (a: Abstand der Quellen)

Diese Formel $a \cdot \sin \theta = n \cdot \lambda$ hat aber mit der Bedingung $b \cdot \sin \theta = n \cdot \lambda$ für Beugungsminima nichts zu tun.

Beweis:

 $b\cdot\sin\theta=n\cdot\lambda$ für Intensitätsminima

Interferenz zweier Quellen (IV.4.1) führte auf Minima, wenn

$$r_1 - r_2 = \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \frac{3\lambda}{2}, \ldots = n' \cdot \frac{\lambda}{2}$$

 $r_1 - r_2$: Gangunterschied, n' ungerade

A und C sollen sich auslöschen (B und $D,\,C$ und E):

$$r_1 - r_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sin \theta = n' \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Behauptung bewiesen für ungerade $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$

Jetzt ist das für gerade Zahlen zu beweisen:

A und B (B und C, C und D, D und E) sollen sich auslöschen:

$$r_1 - r_2 = \frac{1}{4} \cdot b \cdot \sin \theta = n' \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad (n' \text{ ist immer ungerade: } \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

$$\Rightarrow b \cdot \sin \theta = \underbrace{2n'}_n \cdot \lambda$$

 $\label{eq:series} \begin{array}{l} \Rightarrow \mbox{ bewiesen für } n=\pm 2,\pm 6,\pm 10,\ldots \\ \mbox{ Behauptung ist also bis jetzt bewiesen für } n=\pm 1,\pm 2,\pm 3, \quad ,\pm 5,\pm 6,\pm 7, \quad ,\ldots \\ \mbox{ Betrachte Gangunterschiede } \frac{b}{8}\cdot\sin\theta=n'\cdot\frac{\lambda}{2}, \frac{b}{16}\cdot\sin\theta=n'\cdot\frac{\lambda}{2},\ldots \end{array}$

 \Rightarrow Behauptung.

Wir haben Minima des Beugungsbildes für alle

$$\sin \theta = \frac{n \cdot \lambda}{b} = \pm \frac{\lambda}{b}, \pm 2 \cdot \frac{\lambda}{b}, \dots$$

(Abb. IV.47)



Abbildung IV.47: Beugungsbild des Spaltes (Blende)

Das Beugungsbild des Spaltes sieht anders aus als die Interferenz zweier synchron schwindender Quellen! (Abb. IV.48)



Abbildung IV.48: Interferenz zweier synchron schwingender Quellen

Winkelauflösungsvermögen nach LORD RAYLEIGH

entscheidend für die Auflösung von Strukturen (atomistisch, astronomisch) ist die Beugung.

Frage: Welch kleinstmöglichen Winkel kann man mit einer gegebenen Anordnung auflösen?

Jedes Instrument (Mikroskop, Teleskop) hat eine endliche Öffnung (Objektivbreite \emptyset)

LORD RAYLEIGH: Das Winkelauflösungsvermögen wird definiert, indem zwei Quellen dann als unterscheidbar (trennbar, auflösbar) gelten, wenn das erste Beugungsminimum der einen Quelle ins Hauptmaximum der anderen Quelle fällt.

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{b} \approx \theta_1$$



Abbildung IV.49: Winkelauflösungsvermögen nach LORD RAYLEIGH

Grundlegende Beziehung für alle Arten von Strukturuntersuchungen. Es gibt 2 Wege, um θ_1 immer kleiner zu machen:

- kleinere Wellenlängen λ (Beschleuniger; $E = h \cdot \nu \propto \frac{1}{\lambda}$)
- größere Objektivdurchmesser (größere Teleskope!)

Beispiele:

(1) Spiegelteleskop $D \cong 5 \dots 8m \not {o}$ (Mount Palomar: 5m)

$$\lambda \approx 500 \text{nm}$$
$$\Delta \theta \approx \frac{500 \text{nm}}{5 \text{m}} \approx 10^{-7} \text{ rad}$$
$$1 \text{ rad} = 57, 3^{\circ} \qquad (2\pi \text{ rad} = 360^{\circ})$$

(vgl. Abb. IV.50)

 $\Delta x = r \cdot \Delta \theta = 384\,000\,\mathrm{km} \cdot 10^{-7}$ (r: Entfernung Erde–Mond)

 $\Rightarrow \Delta x \approx 40 \,\mathrm{m}$ (Idealwert)

Objekte von mehr als 40m können im Idealfall auf dem Mond unterschieden werden.

(2) Radioteleskope (Radiowellen: cm, mm etc.)

 $\lambda = 21 \,\mathrm{cm}$ (H–Linie)

Durchmesser $D \approx 300 \text{m}$ (Puerto Rico)

$$\Rightarrow \Delta \theta \approx \frac{0, 3m}{300m} = 10^{-3} \, rad$$

Radio interferometrie

 $\Rightarrow D \approx 10000 \,\mathrm{km}$ (Erddurchmesser)

$$\Rightarrow \Delta \theta \approx 2 \dots 3 \cdot 10^{-8} \, \mathrm{rad}$$

(3) VLT: optisches Teleskop + Interferometrie (Very Large baseline Telescope) Basisbreite $\approx 120m \Rightarrow \Delta\theta \approx 4 \cdot 10^{-9}$



Abbildung IV.50: Auf den Mond gerichtetes Teleskop



Abbildung IV.51: YOUNG'scher Doppelspaltversuch

IV.4.4.2 Beugung an zwei gleichen parallelen Spalten (Young'scher Doppelspalt)

2 Quellen zeigen Interferenzmuster; jeder Spalt erzeugt ein Beugungsbild.
YOUNG: Erzeugung kohärenten Lichtes (2 Lichtquellen mit fester Phasenbeziehung)
Kohärentes Licht wird heute mit Lasern erzeugt.
Bild auf dem Schirm:

a) Interferenz von 2 Quellen führt auf Maxima des Interferenzmusters

 $a \cdot \sin \theta = n \cdot \lambda, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

b) Beugungsbild des einzelnen Spaltes hat Minima bei

 $b \cdot \sin \theta = n' \cdot \lambda, \qquad n' = \pm 1, \pm 2, \dots$

a > b (Abstand der Spalte > Spaltbreiten)

IV.4.4.3 Beugungsgitter

Breite der Spalte: bAbstand der Spalte: aN synchron schwingende Quellen

a) Hauptmaxima des Interferenzmuzsters von N Quellen (N Gitterstreifen)

 $a \cdot \sin \theta = n \cdot \lambda, \quad n = 0, \pm 1, \dots$

b) Beugungsmuster des Einzelspaltes ist überlagert (abklingende Intensität). Minima bei

 $n' \cdot \lambda = b \cdot \sin \theta, \quad n' = \pm 1, \dots$

Anwendung: Gitterspektrograph mit fein geritzten Glasplatten für die Bestimmung von λ . n: Beugungsordnung (meist in 1. Ordnung gemessen) **Auflösungsvermögen bezüglich** λ (nicht zu verwechseln mit RAYLEIGH: $\Delta\theta$) Definition: $\frac{\lambda}{d\lambda}$ heißt Auflösungsvermögen (d.h. die kleinste noch auflösbare Wellenlänge) Behauptung:

 $\frac{\lambda}{d\lambda} = n \cdot N \qquad (n: \text{Beugungsordnung}, N: \text{Zahl der Spalte, Ritzungen})$

Wellenlängen, die sich um $d\lambda$ unterscheiden, sollen noch getrennt werden.



Abbildung IV.52: Beugung am Gitter

 Δ : Gangunterschied für $\lambda + d\lambda$:

$$\Delta = n(\lambda + d\lambda)$$

Früher hatten wir schon:

 $r_1 - r_2 = \Delta_n = n \cdot \lambda, \quad \Delta_{n+1} = (n+1) \cdot \lambda = n \cdot \lambda + \lambda$

In IV.4.4.2 für N Quellen ist die Lage des 1. Minimums:

$$\Delta_{\frac{1}{N}} = a \cdot \sin \theta = \frac{n' \cdot \lambda}{N} = \frac{\lambda}{N}$$
 für $n' = 1$

Es soll das Hauptmaximum der Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ (siehe Abb. IV.52) auf das 1. Minimum der Wellenlänge λ fallen, um λ von $\lambda + d\lambda$ trennen zu können.

$$\Delta = n(\lambda + d\lambda) = n\lambda + \frac{\lambda}{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{d\lambda} = n \cdot N$$

n meist 1 oder 2. Es muss N (Zahl der interferierenden Strahlen) groß gemacht werden.

IV.4.5 Röntgenbeugung

elektromagnetische Strahlung wird zur Strukturuntersuchung (von Festkörpern) eingesetzt.

BABINET*sches Prinzip:* Das Beugungsbild einer Blende (eines Spaltes) ist identisch mit dem Beugungsbild der gleich großen Scheibe.



Abbildung IV.53: Streuung am Atom

 \Rightarrow Untersuchung von atomistischen Strukturen ist möglich. Die Hindernisse (Streukörper) sind die Atome selbst.

$$\xi \cong e^{i\vec{k}\vec{r}} + f(\theta) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \qquad \left(f(\theta): \text{Streuamplitude}; \, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

 $f(\theta)$ gibt Aufschluss über die Gestalt des Streukörpers.

Prinzip der Strukturuntersuchung:



Abbildung IV.54: Strukturuntersuchung an 3-dim. Gitter (Kristallen) mit RÖNTGEN-Strahlung

N Quellen: Intensitätsmaxima für $\sin \theta = \frac{n \cdot \lambda}{a}$. λ fest vorgegeben \Rightarrow Atomabstand a bestimmbar

Beispiel:

Wie groß muss λ sein, um Atomabstände zu messen?

$$\begin{aligned} a &\sim 1 \text{ \AA} = \frac{1}{10} \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m} \\ \theta &\sim \frac{1}{10} \quad (\approx 5, 7^{\circ}; \ \pi \text{ rad} = 180^{\circ}) \\ \Rightarrow &\lambda = \underbrace{10^{-10}}_{a \ [m]} \cdot \underbrace{\frac{1}{10}}_{\sin \theta \approx \theta} = 10^{-11} \text{ m} \\ h &= 4, 14 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ E &= h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{E \approx 120 \text{ keV}}_{\text{typische}}_{\text{Röntgenstrahlung}} \end{aligned}$$

Für Kristalluntersuchungen wird sehr kurzwelliges "Licht" = RÖNTGEN-Strahlung benötigt.

Frage: Wie sieht das Beugungsbild von Kristallen aus (BRAGGsche Beugung)?



Abbildung IV.55: Reflexion und Streuung; Gitterebenen

Gangunterschied zwischen Atomebenen (vgl. Abb. IV.55):

 $2d \cdot \sin \theta = r_1 - r_2 = \Delta$

Gangunterschied für Maxima:

$$\delta = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (r_1 - r_2)$$
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2d \cdot \sin \theta = 2\pi \cdot n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

 $2d\cdot\sin\theta=n\cdot\lambda$ | Maxima für Röntgenbeugung

 $(d \text{ ist zu bestimmen, } \sin \theta \text{ wird gemessen, } \lambda \text{ ist fest vorgegeben})$

BRAGGsche Beziehung zur Messung von Atomabständen. (Anwendung in der Chemie, Stereochemie, Aufklärung von Makromolekülen, Verunreinigungen aus Streuintensität $I \sim f(\theta)^2$)

RÖNTGEN-Strahlung hat Wellencharakter, sonst gäbe es keine Interferenzen

Beachte: Selbst im einfachsten kubischen Kristall gibt es unendlich viele Ebenenscharen (vgl. Abb. IV.55).

Kapitel V

Wechselwirkung von elektromagnetischer Strahlung mit Materie

(Experimentelle Grundlagen der Quantenphysik)

V.1 Photonen (Lichtteilchen)

V.1.1 Der Compton-Effekt

Streuung von elektromagnetischen Wellen an "freien" Elektronen (weil sehr schwach im Atom gebunden). Experiment: Das Experiment misst die Wellenlänge λ .



Die gestreute Stahlung habe die Wellenlänge λ' .

Abbildung V.1: Elektromagnetische Welle der Wellenlänge λ wird am Elektron gestreut

Beobachtung: (Abb. V.2)

 $\lambda' - \lambda_0 \cong \lambda_c \cdot (1 - \cos \theta)$ (charakteristische Winkelabhängigkeit von λ)

 $\lambda' = f'(\theta), \quad \lambda' \neq \lambda_0$

Frage: Wie kann man das verstehen? Als Streuung von Wellen unverständlich! *Antwort:* Hypothese

Es handelt sich um einen elastischen Stoß von Lichtteilchen (Photonen) an Elektronen.

Energie
– und Impulssatz Elektron ruht: $\vec{p_e}=0, \quad E_e=m_e\cdot c^2$



Abbildung V.2: Spektren bezüglich λ



Abbildung V.3: Energie- und Impulssatz beim COMPTON-Effekt

Wir benutzen nur die Tatsache, dass Licht Energie und Impuls hat.

Energiesatz:

 $E_{\gamma} + m_e c^2 = E'_{\gamma} + E'_e$ ($m_e c^2$: Ruheenergie des Elektrons)

Impulssatz:

$$\vec{p}_{\gamma} = p'_{\gamma} + p'_e$$

 $relativistische {\it Beziehung:}$

$$E'_{e} = \sqrt{p'_{e}c^{2} + m_{e}^{2}c^{4}}$$

Impuls des Photons $(m_{\gamma} = 0)$: $|\vec{p}_{\gamma}| = \frac{E_{\gamma}}{c}$ Rechnung zum COMPTON-Effekt: $|\vec{p'_e}|$ soll eliminiert werden

$$|\vec{p'_e}|^2 = \underbrace{\frac{E_{\gamma}^2}{c^2}}_{p_{\gamma}^2} + \underbrace{\frac{{E'_{\gamma}}^2}{c^2}}_{p'_{\gamma}^2} - 2 \cdot \frac{E_{\gamma}E'_{\gamma}}{c^2} \cdot \cos\theta$$

$$E'_{e}{}^{2} = (E_{\gamma} - E'_{\gamma} + m_{e}c^{2})^{2} = E_{\gamma}^{2} + E'_{\gamma}{}^{2} = 2E_{\gamma}E'_{\gamma} + m_{e}^{2}c^{4} + 2(E_{\gamma} - E'_{\gamma}) \cdot m_{e}c^{2}$$
$$= p'_{e}{}^{2}c^{2} + m_{e}^{2}c^{4}$$
$$= E_{\gamma}^{2} + E'_{\gamma}{}^{2} - 2E_{\gamma}E'_{\gamma} \cdot \cos\theta + m_{e}^{2}c^{4}$$

$$E_{\gamma}'(-E_{\gamma}\cos\theta + E_{\gamma} + m_e c^2) = E_{\gamma}m_e c^2$$

$$\left| E_{\gamma}' = \frac{E_{\gamma}}{1 + \frac{E_{\gamma}}{m_e c^2} \cdot (1 - \cos \theta)} \right| \le E_{\gamma}$$

 $\boxed{\frac{1}{E_{\gamma}'} - \frac{1}{E_{\gamma}} = \frac{1}{m_e c^2} \cdot (1 - \cos \theta)}$ kinematische Rechnung für elastischen Stoß $\boxed{\lambda' - \lambda_0 = \lambda_c \cdot (1 - \cos \theta)}$ Experiment

$$\stackrel{\text{Schluss}}{\Longrightarrow} \frac{1}{E_{\gamma}} \propto \lambda_{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{\gamma} \propto \nu}$$
$$\frac{1}{E_{\gamma}'} \propto \lambda'$$
$$E_{\gamma} \propto \frac{1}{\lambda_{0}} \propto \nu$$

 $\begin{array}{ccc} \hline E_{\gamma} \propto \nu & \Rightarrow & E_{\gamma} = h \cdot \nu \end{array} & \mbox{Proportionalitätskonstante ist das PLANCKsche Wirkungsquantum } h \\ \hline p_{\gamma} = \frac{E_{\gamma}}{c} = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \\ \hline \lambda_{c} = \frac{h}{m_{e} \cdot c} \mbox{[Längeneinheit aus Naturkonstanten zusammengesetzt]} & \mbox{heißt COMPTON-Wellenlänge} \end{array}$

$$\begin{bmatrix} E = h \cdot \nu = \hbar \cdot \omega \\ p = \frac{h}{\lambda} = \hbar \cdot k \end{bmatrix}$$

(h: PLANCKsches Wirkungsquantum; $\hbar = \frac{h}{2\pi}, k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

links stehen Begriffe "mechanischer" Natur, Teilchennatur (Vorsicht: auch Wellen haben Energie und Impuls); rechts stehen Wellengrößen ν, λ .

Wellen-Teilchen-Dualismus: Licht verhält sich je nach "Befragung" als Teilchen oder Welle.

Anthropomorphe Bilder: Teilchen, Welle (auch als mathematische Fiktionen) sind nicht die ganze Wahrheit, sondern verraten nur Aspekte der Natur des Lichtes: Quantenfeldtheorie, Quantenelektrodynamik geben die korrekte Antwort.

Wellenpaket: vereinheitlichte Veranschaulichung von Teilchen und Wellen

Was ist Licht? Transport von Energie, Impuls, Drehimpuls, keine Ladung

Dies widerspricht nicht den MAXWELLschen Gleichungen:

Energiedichte
$$\frac{dE_{\gamma}}{dV} \sim |\vec{B}|^2 \sim |\vec{E}|^2$$

Impulsdichte $\underbrace{\frac{d\vec{p}_{\gamma}}{dV}}_{,,\text{gequantelt}"} \sim \left(\vec{B} \times \vec{E}\right)$

Quantenelektrodynamik umfasst die MAXWELLschen Gleichungen.

Abb. V.4 zeigt den *einzigen* Baustein dieser Theorie. Die Bausteine sind zu kombinieren. Die Absorption von Photonen an freien Elektronen ist nicht möglich (wegen Energie- und Impulssatz). *Compton-Effekt:* (elastische Streuung von Photonen an Elektronen; siehe Abb. V.5)



Abbildung V.4: Einziger Baustein der Quantenelektrodynamik (QED)

Paarvernichtung: $e^-e^+ \rightarrow \gamma\gamma = Annihilation$, Vernichtung von Materie (Abb. V.6) Umgekehrte Richtung: $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$

Kosmos:
$$\frac{\text{Materie}}{\text{Licht}} \sim 10^{-9}$$

Vakuumpolarisation: (Abb. V.7)

Selbstenergie eines Elektrons: (Wechselwirkung mit sich selbst; Photonenhülle; Abb. V.9)



Abbildung V.5: Quantenelektrodynamik beim COMPTON-Effekt



Abbildung V.6: Paarvernichtung (Annihilation)



Abbildung V.7: Vakuumpolarisation



the Zustande mit Elektronen Sesetzt (unendnen grobe negative Eade

(Das Vakuum enthält eine unendlich große negative Ladung.)

Abbildung V.8: DIRAC–See



Abbildung V.9: Selbstenergie eines Elektrons (Photonenhülle)

V.1.2 Photo-Effekt

(EINSTEIN-Deutung 1905) Experiment: (vgl. Abb. V.10)



Abbildung V.10: Experiment zum Photo–Effekt

Befund:

$$E_{\rm kin}^e = \frac{1}{2} \cdot mv^2 = h \cdot \nu - \Phi$$
 (Φ : Ablösearbeit)



Abbildung V.11: Befund beim Photo-Effekt



Abbildung V.12: FEYNMAN-Graph zum Photo-Effekt

- (1) Es gibt eine Schwellenfrequenz ν_{grenz} , unterhalb derer kein Photoelektronenstrom auftritt (Photostrom hängt von ν ab, nicht von der Intensität der Strahlung)
- (2) $E_{\rm kin}^e = E_\gamma \Phi = h\nu \Phi$

 $E_{\rm kin}^e = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi = h\nu_{\rm grenz}$

 Φ Ablösearbeit (Bindungsenergie in Atomen, Molelülen; Anwendung in der Festkörperphysik, Chemie)

(3) Deutung (Quantenelektrodynamik, FEYNMAN)

Wellenbild ist hier ausgeschlossen. Man kann *nicht* viele Photonen aufeinander stapeln. Erhöhung der Intensität der Welle hat keinen Einfluss. \Rightarrow Teilchenbild

- (4) Anwendungen
 - a) Photozelle, Solarzelle
 - b) Nachweis von Röntgen-Strahlung, Kern- γ -Strahlung
 - c) Photomultiplier
 - d) Photoeffekt $\sim Z^{4...5}$ (Wahrscheinlichkeit)

 \Rightarrow Röntgen-Bilder des Menschen zeigen vor allem das Skelett (Kalzium hat Z=20, Gewebe = Wasser hat Z=8 für Sauerstoff)

V.2 Teilchen und Felder

V.2.1 Materiefelder

Lichtquanten:

aus der Mechanik (Teilchencharakter)
$$\begin{cases} E_{\gamma} = h \cdot \nu = \hbar \cdot \omega \\ \vec{p}_{\gamma} = \frac{h}{\lambda} \cdot \hat{p}_{\gamma} = \hbar \cdot k \cdot \hat{p}_{\gamma} \end{cases}$$
Wellen-Größen

(auszudrücken durch \vec{E} und \vec{B})

h regiert im atomistischen Bereich.

Licht kann in diesem Sinne keine Ausnahme sein. Auch massebehaftete Körper sollen diese Beziehungen erfüllen. (\Rightarrow Materiefelder)

$$E = \hbar \cdot \omega$$
$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar \cdot k$$

Diese Beziehungen heißen nach PRINCE DE BROGLIE "DE-BROGLIE-Beziehungen".

Auch Teilchen $(m \neq 0)$ zeigen Wellencharakter.

Experimenteller Nachweis: Interferenz- und Beugungserscheinungen

Frage: Beschreibung dieses Sachverhalts (Wellenbildes von Teilchen)

Ebene Wellen sind zur Beschreibung von Teilchen nicht geeignet, weil

1) die Amplitude der ebenen Welle

$$\psi(\vec{r},t) = A \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \cdot (\vec{p}\vec{r}-Et)}$$

für $-\infty \leq x, y, z \leq +\infty$ definiert ist

 \Rightarrow Teilchen wäre nicht lokalisierbar

V.2. TEILCHEN UND FELDER

2) Phasengeschwindigkeit ist größer als die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum:

$$v_{\rm Ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} \ge c$$
 `

Lösung und Antwort: Wellenpaket (wie in Abb. IV.13)

Prüfung dieser Antwort:

Geschwindigkeit des Wellenpaketes ist die Gruppengeschwindigkeit, die sich als die Teilchengeschwindigkeit erweist:

$$v_{\rm gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp} = v_T$$
$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$
$$2EdE = 2pc^2 dp \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E} = \frac{pc^2}{mc^2} = \frac{p}{m} = v_T$$

 $(v_T: \text{Teilchengeschwindigkeit})$

V.2.2 Experimenteller Nachweis von Welleneigenschaften

 (Beugung von Elektronen, Neutronen ... an Kristallen) Atomabstände ~ 1 Å = 10^{-10} m = $\frac{1}{10}$ nm Welche Energie müssen Elektronen, Neutronen haben für solche Untersuchungen?

$$E^e_{\rm kin}=eU=\frac{p^2}{2m_e}=\frac{h^2}{2m_e\lambda^2}$$

(U: durchlaufene Spannung zur Beschleunigung der Elektronen)

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} = \frac{1, 2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{U\left[\mathrm{V}\right]}} \,[\mathrm{m}]$$

Beispiel:

$$U = 10 \,\text{kV}, \quad E_{\text{kin}}^e = 10 \,\text{keV}, \quad \lambda \cong 1, 2 \cdot 10^{-11} \,\text{m}$$

 \Rightarrow Elektronenmikroskopie

 $\lambda \ll b$ (b
 aufzulösende Struktur, sonst dominieren Beugungseffekte) Vergleich mit Röntgen-Strahlung

$$\lambda = \frac{hc}{E_{\gamma}} \sim \frac{200 \text{ MeV fm} \cdot 2\pi}{100 \text{ keV}} \qquad p_{\gamma} = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$
$$\hbar c = \frac{hc}{2\pi} = 200 \text{ MeV fm}, \quad 1 \text{ fm} = 10^{-15} m$$
$$\Rightarrow \lambda \cong 1, 2 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

 E_{γ} ist rund 10× größer als E_{kin}^e , wenn die gleiche Wellenlänge λ erzielt werden soll. Neutronenbeugung: $(m_n \sim 2000 m_e)$

$$E_{\rm kin}^n = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{\hbar^2 c^2}{2m_n c^2 \cdot \lambda^2}, \quad m_n c^2 \sim 1000 \,{\rm MeV}$$
$$\lambda = 2 \cdot 10^{-10} \,{\rm m} \sim 2 \,{\rm \AA}, \quad \Rightarrow \quad E_{\rm kin}^n \sim 0,025 \,{\rm eV}$$

thermische Energie $\sim 0,025\,{\rm eV}$ bei 20° C

V.3 Gedankenexperiment zur Quantenphysik

abgeleitet vom Doppelspaltversuch, vgl. [7]: "Herz der Quantenphysik"

1) Experiment mit Schrotkugeln durch Doppelspalt. Ergebnis: (vgl. Abb. V.14)

 $P = \text{ probability } = \frac{\text{Trefferrate}}{\text{Gesamte Rate}} \leq 1$

keine Interferenz mit klassischen Teilchen

2) Wasserwellen: (klassisches Wellenbild)

Addition von Amplituden der Wellen führt auf typisches Interferenzbild

$$P_{12} = |A_1 + A_2|^2 = (A_1 + A_2) \cdot (A_1^* + A_2^*) = |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1 A_2^* + A_2 A_1^* \qquad A_k = |A_k| \cdot e^{i\delta_k}$$

mit dem Interferenzterm

$$A_1 A_2^* + A_2 A_1^* = A_1 A_2^* + (A_1 A_2^*)^* = 2 \cdot |A_1| \cdot |A_2| \cdot \operatorname{Re}\left(e^{i(\delta_1 - \delta_2)}\right) = 2 \cdot |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cos(\delta_1 - \delta_2)$$

3) Experiment mit Elektronen

 $P_{12} = P_1 + P_2 +$ Interferenzterm

4) Experiment mit Elektronen und Lichtquelle (vgl. Abb. V.13)

Lichtquelle soll nachweisen, durch welches Loch das Elektron gegangen ist. Bei der Streuung des Elektrons am Photon der Lichtquelle wird das Elektron um den Impuls Δp_x abgelenkt. Der Abstand der beiden Spalte beträgt $a \sim \Delta x$.

Der Versuch, diese Frage zu beantworten, durch welches Loch das Elektron gegangen ist, führt auf Zerstörung der Interferenzfigur. Das Elektron erscheint nicht mehr dort auf dem Schirm, wo es ohne Lichtquelle angekommen wäre.



Abbildung V.13: Experiment zur Elektronenlokalisation

 $\Delta p_x \approx p \cdot \sin \theta, \quad |\vec{p'}| \approx |\vec{p}| \approx p$ Beugung: $a \cdot \sin \theta \approx \lambda \ (n = 1), \ \Delta x \approx a$

$$\Delta x \Delta p_x \approx \frac{\lambda}{\sin \theta} \cdot p \sin \theta = h$$

$$\Delta x \Delta p_x \sim h$$
HEISENBERGsche Unschärfebeziehung

Die HEISENBERGsche Unschärfebeziehung erscheint als Folge von $p = \frac{h}{\lambda}$.



Abbildung V.14: Interferenzversuche mit Wellen und Teilchen

HEISENBERG**sche Unschärferelation:** Es ist unmöglich, eine Apparatur zu bauen, die sagt, durch welches Loch das Elektron geht, ohne die Interferenzfigur zu zerstören.

Es gibt eine naturgesetzliche Grenze

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \sim h$$

 $(\Delta p_x:$ Impulsunschärfe; $\Delta x:$ Ortsunschärfe) FOURIER-Analyse von klassischen Wellenpaketen:

$$\Delta k \cdot \Delta x \sim 2\pi$$
 $\hbar k) \cdot \Delta x \sim h$

DE-BROGLIE: $p_x = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$

 $\Delta($

Impulsunschärfe und Ortsunschärfe sind verknüpft. Man kann Impuls und Ort nicht gleichzeitig beliebig genau messen. (bedingt durch die DE-BROGLIE-Beziehung)

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

$$\Delta \omega \cdot \Delta t \sim 2\pi$$
$$\Delta (\hbar \omega) \cdot \Delta t \sim h$$
$$\Delta E \cdot \Delta t \sim h$$

Für das Zeitintervall Δt ist die Energie unscharf: ΔE

Man kann Energie "borgen" aus dem Vakuum, global gilt der Energiesatz. (vgl. Abb. V.15)



Abbildung V.15: "Geborgte" Energie zur Erzeugung eines Z^0 -Teilchens





$$\Delta E \cdot \underbrace{\Delta t}_{\tau} \sim h$$

Abbildung V.16: Unscharfer Energiezustand eines angeregten Atoms

First principles of quantum physics

1.) Nur die Angabe von Wahrscheinlichkeiten ist möglich, beschrieben durch die Wellenfunktion ψ (komplex)

 $P = |\psi|^2 = \psi \cdot \psi^* \ge 0$

(P: Aufenthaltswahrscheinlichkeit, ψ : Wahrscheinlichkeitsamplitude) FOURIER-Integral:

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int A(\vec{k},\omega) \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} d^{3}\vec{k} \, d\omega$$
$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int A(\vec{k},\omega) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \cdot (\vec{p}\vec{r}-Et)} d^{3}\vec{p} \, d\omega$$

 $d^3\vec{k} = dk_x \, dk_y \, dk_z$

$$\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k} \qquad E = \hbar \cdot \omega$$
$$\int_{\text{Raum}} |\psi(\vec{r}, t)|^2 \ d^3\vec{r} = 1$$

Wahrscheinlichkeit, das Teilchen irgendwo im Raum zu finden, muss 1 sein.

2.) Wenn ein Ereignis auf zwei verschiedene Weisen erfolgen kann, dann ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$
 lineare Superposition
 $P = |\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1 \psi_2^* + \psi_2 \psi_1^*$

mit dem Interferenzterm (verantwortlich für die Hell-Dunkel-Streifen)

$$\psi_1\psi_2^* + \psi_2\psi_1^* = \psi_1\psi_2^* + (\psi_1\psi_2^*)^* = 2 \cdot \operatorname{Re}\psi_1\psi_2^*$$

3.) Wenn wir die zwei verschiedenen Weisen unterscheiden können

 $\Rightarrow P = P_1 + P_2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ (Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten)

Phasenraumplots: Phasenraum hat 6 Dimensionen (3 räumliche: x, y, z; 3 Impulskomponenten = Geschwindigkeitskomponenten p_x, p_y, p_z)



Abbildung V.17: Klassische Sicht links und die HEISENBERG
sche Unschärfebeziehung rechts H-Atom: (siehe Abb. V.18 und V.19)



Abbildung V.18: $H\mathchar`-Atom,$ klassisch gesehen



Abbildung V.19: H-Atom, unter Berücksichtigung der Unschärferelation

Kapitel VI

Quantenmechanik, Schrödingergleichung

VI.1 Unterschiede zwischen der klassischer Physik und der Quantenphysik

klassische Physik (Teilchen, "Schrotkugeln")	Quantenphysik (Wellen)
Ort und Impuls, Energie und Zeit (kanonische Größen)	$\Delta E \Delta t \sim h, \Delta p \Delta x \sim h$
beliebig genau messbar	Es gibt Unschärfebeziehungen
präzise Bahnkurven (NEWTONs Mechanik)	Aufenthaltswahrscheinlichkeiten
Beispiel: Planetenbahnen	
Energie, Drehimpuls können in beliebigen	Quantelung: $E = \hbar \omega$
Mengen übertragen werden	$ \vec{L} = \vec{p} \times \vec{r} = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar, \ l = 0, 1, \dots$
Wir wissen, was unter bestimmten Umständen passiert:	Es ist unmöglich, das zu erfahren,
Elektron geht entweder durch Loch 1 oder 2	ohne den natürlichen Prozess zu zerstören

Schöpfer der Quantenphysik:

- LOUIS DE BROGLIE, Paris
- ERWIN SCHRÖDINGER, Berlin
- WERNER HEISENBERG, Göttingen
- PAUL DIRAC, Cambridge
- MAX BORN, Göttingen und andere
- DAVID HILBERT (Mathematiker), Göttingen

(Zeitraum: 1925–1930)

VI.2 Schrödingergleichung

Wellengleichung für Materiewellen bzw. für Teilchen

Frage: Wie rechnet man die Wellenfunktion $\psi(\vec{r})$ aus? Beispiel: Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons im H–Atom oder im Festkörper

 $P = |\psi(\vec{r})|^2$

Wir brauchen eine Gleichung für $\psi(\vec{r}) \Rightarrow$ lösen Forderungen an diese Differentialgleichung:

1. Wellengleichung muss sich ergeben, stationäre (d.h. zeitlich harmonische) Zustände sollen wie früher (siehe Saite) durch *stehende Wellen* beschrieben werden.

$$\xi = \underbrace{2A \sin kx \cos \omega t}_{=f(x) \cdot \cos \omega t} \qquad \text{(keine fortschreitende Welle)}$$
$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{\omega}{v} = k$$
$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cdot \cos \omega t + \frac{\omega^2}{v^2} \cdot f(x) \cdot \cos \omega t = 0$$

Gleichung stehender Wellen:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + k^2 f(x) = 0 \qquad \text{(siehe IV.4.3.3)}$$

- 2. DE-BROGLIE–Beziehung einbauen: $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ (damit ist die HEISENBERGsche Unschärferelation automatisch eingebaut)
- 3. Energiesatz gilt:

$$E_{\rm kin} + E_{\rm pot} = E_{\rm ges} \qquad \text{(nichtrelativistisch)}$$
$$\frac{p^2}{2m} + E_{\rm pot} = E_{\rm ges}$$
$$p^2 = (E_{\rm ges} - E_{\rm pot}) \cdot 2m$$
$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \cdot (E_{\rm ges} - E_{\rm pot})$$

f(x) wird ersetzt durch $\psi(x)$:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot (E_{\text{ges}} - E_{\text{pot}}) \cdot \psi(x) = 0$$
$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + E_{\text{pot}}\psi(x) = E_{\text{ges}}\psi(x)} \quad \text{Schrödinger-Gleichung}$$

 $E_{\text{kin}} \text{ ersetzt durch } -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2}{dx^2}$ $p \text{ ersetzt durch } -i\hbar \cdot \frac{d}{dx}$

Erinnerung an die MAXWELLsche Gleichungen (IV.1.2):

$$\begin{split} \vec{k} \ \Rightarrow \ -i\vec{\nabla}, \quad \vec{\nabla} = i\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial t} \ \Rightarrow \ -i\omega, \quad \omega \ \Rightarrow \ i\cdot\frac{\partial}{\partial t} \end{split}$$

- 0

Diese Ersetzung ist nicht an die Quantenphysik gebunden, sondern stammt aus der Wellenphysik, insbesondere bei den MAXWELLschen Gleichungen gefunden

Neu: Quantenphysik, Faktor \hbar ! DE-BROGLIE–Beziehung muss erfüllt werden! In 3 Dimensionen lautet die SCHRÖDINGER–Gleichung (gültig für $v_e \ll c$)

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \Delta \psi(\vec{r}) + E_{\rm pot} \psi(\vec{r}) &= E_{\rm ges}(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \qquad \text{zeitunabhängige Gleichung} \\ &= \hbar \omega \cdot \psi(\vec{r}, t) \\ &= i\hbar \cdot \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\Delta\psi(\vec{r})+E_{\rm pot}\psi(\vec{r})=i\hbar\cdot\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t}$$

zeitabhängige Gleichung

Der Impuls \vec{p} wird ersetzt durch einen Differential
operator

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \Rightarrow \underbrace{-i\hbar \cdot \frac{d}{dx} = -i\hbar \vec{\nabla}}_{\text{Operatoren}}$$

und E_{ges} durch $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$:

$$E_{\rm ges} = \hbar\omega = i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t}$$

SCHRÖDINGER-Gleichung ist zu lösen:

Eingabe: $E_{\text{pot}}(\vec{r}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, z.B. das *H*-Atom (vgl. Abb. V.19) *Ergebnis (Lösung):* $\psi(\vec{r})$, E_{ges}

 \Rightarrow Eigenwertproblem (hier Energie
eigenwerte $h\nu;$ gespannte Saite: Frequenzen
 $\nu_i;\ldots)$

VI.3 Potentialstufe

(1-dimensional, $E_{\rm pot}$ gegeben)



Abbildung VI.1: Potentialstufe

Modell für Elektronen im Festkörper, die gegen einen "Potentialberg" anlaufen. 2 Fälle:

a) $E < E_0 (E_{ges} = E)$

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$
$$E_{\text{kin}} = E_{\text{ges}} - E_{\text{pot}} < 0$$

klassisch (Teilchen): Teilchen kann nicht in den Berg eindringen, weil $E_{\rm kin} < 0$.

b)
$$E_{\text{ges}} > E_0$$

Fall a): Gebiet I: $E_{\text{pot}} = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} + \underbrace{E_{\text{pot}}}_{=0} \psi = E \cdot \psi$$
$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \cdot \psi_1 = 0$$

Lösungsansatz (ebene Wellen) für die gewöhnliche Differentialgleichung des harmonischen Oszillators:

$$\psi_1(x) = \underbrace{A \cdot e^{ikx}}_{\text{einfallende Welle}} + \underbrace{B \cdot e^{-ikx}}_{\text{reflekt. Welle}}$$

 $A\neq B$ vorausgesetzt, weil vielleichtkeine 100-prozentige Reflexion beobachtet wird. Gebiet II: $E_{\rm pot}=E_0$ (konstant)

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m(E - E_0)}{\hbar^2} \cdot \psi_2 = 0$$

Definition: $E < E_0$ positiv

$$\alpha^2 = \frac{2m(E_0 - E)}{\hbar^2} > 0$$
$$\Rightarrow \frac{d^2\psi_2}{dx^2} - \alpha^2\psi_2 = 0$$

Lösungsansatz für diese Gleichung: exponentiell abklingende Funktion

$$\psi_2 = \underbrace{\underline{C} \cdot e^{-\alpha x}}_{\text{abklingend}} \underbrace{\left[+ \underbrace{\underline{D} e^{+\alpha x}}_{\text{ansteigend}} \right]}_{\text{nicht möglich}}$$

Wenn $C \neq 0$ wäre, würde das Teilchen in den Berg eindringen (klassisch unmöglich). Wir fordern Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle x = 0

1)
$$\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0) \Rightarrow A+B=C$$

2)
$$\frac{d\psi_1}{dx}(x=0) = \frac{d\psi_2}{dx}(x=0) \implies ik(A-B) = -\alpha C$$

 \Rightarrow Zwei Gleichungen für zwei Unbekannte (A vorgegeben)

$$B = \left(\frac{ik+\alpha}{ik-\alpha}\right) \cdot A, \qquad C = \left(\frac{2ik}{ik-\alpha}\right) \cdot A, \qquad A \neq B$$

Wellenfunktion:

$$\psi_1(x) = A \cdot \left[e^{ikx} + \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} \cdot e^{-ikx} \right]$$
$$\psi_2 = \frac{2ik}{ik - \alpha} \cdot A \cdot e^{-\alpha x} \quad \text{exponentiall abklingende Funktion}$$

Das Wellenpaket (Teilchen) dringt also in den Berg ein.

$$\psi_1(x) = \frac{A}{ik - \alpha} \cdot \left[(ik - \alpha) \cdot e^{ikx} + (ik + \alpha) \cdot e^{-ikx} \right]$$

Mit $e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx$ folgt:

$$\psi_1(x) = \frac{2ik}{ik - \alpha} \cdot A \cdot \left[\cos kx - \frac{\alpha}{k} \cdot \sin kx\right]$$

Aufenthaltswahrscheinlichkeit: (Quadrat der Funktion $\psi_1(x)$)

$$|\psi_1(x)|^2 = \frac{4k^2}{k^2 + \alpha^2} \cdot |A|^2 \cdot \left(\cos kx - \frac{\alpha}{k} \cdot \sin kx\right)^2$$

Diskussion des Ergebnisses: Wenn E_0 über alle Grenzen wächst,

$$\alpha^2 = \frac{2m(E_0 - E)}{\hbar^2}$$

dann wächst auch α^2 über alle Grenzen.

$$\Rightarrow \cos kx \ll \frac{\alpha}{k} \cdot \sin kx \qquad (x = 0 \text{ ausgenommen})$$
$$k^2 \ll \alpha^2 \qquad (E \propto k^2)$$
$$\Rightarrow |\psi_1(x)|^2 = 4|A|^2 \cdot \sin^2 kx$$

Das ist die Lösung der eingespannten Saite

$$\xi_n = 2A\sin kx \cos \omega t, \quad |\xi_n|^2 = 4|A|^2 \sin^2 kx (\cos^2 \omega t)$$

$$|\psi_2(x)|^2 = \left|\frac{2ik}{ik - \alpha}\right|^2 \cdot |A|^2 \cdot e^{-2\alpha x}$$
$$\alpha \to \infty \quad \Rightarrow \quad |\psi_2(x)|^2 \to 0$$

⇒ keine Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Potentialberg für $\alpha, E_0 \to \infty$ Intensitäten (Quadrat der Wellenfunktion)

einlaufende Welle: $|A|^2$

reflektierte Welle: $|B|^2 = \left|\frac{ik+\alpha}{ik-\alpha}\right|^2 \cdot |A|^2$

$$|B|^{2} = \underbrace{\left(\frac{ik+\alpha}{ik-\alpha}\right) \cdot \left(\frac{-ik+\alpha}{-ik-\alpha}\right)}_{=0} \cdot |A|^{2} = |A|^{2}$$

Total reflexion: $E < E_0$, Potential stufe unendlich lang (Abb. VI.2)



Abbildung VI.2: unendlich lange Potentialstufe

Alle Teilchen (Wellenpaket) werden hundertprozentig reflektiert. (Anfang $A \neq B$ sozusagen unberechtigt)

Was geschieht im Falle einer endlich breiten Barriere? (Abb. VI.3, VI.4)

⇒ Tunneleffekt bei endlicher Potentialschwelle. (Abb. VI.5) Durchgelassene Intensität: $|C|^2 \cdot e^{-2\alpha x}$ Beispiele: α -Zerfall beim Uran-Kern (4 He-Kerne)

 $NH_3\text{-}\mathrm{Molekül}$ (Ammoniak) (\Rightarrow Maser = microwave amplification of stimulated emission of radiation)

Das N-Atom tunnelt durch die Ebene der H-Atome



Abbildung VI.3: endlich breite Barriere (E(x))



Abbildung VI.4: endlich breite Barriere (ψ)



Abbildung VI.5: Tunneleffekt



Abbildung VI.6: Potentialbarriere beim Uran-Kern



N-Atom nicht lokalisierbar, tunnelt mit definierter Frequenz $\nu = 2.3786 \cdot 10^{10}$ Hz (Zeitstandard)

Abbildung VI.7: Tunneleffekt beim Ammoniak

Fall b): $E > E_0$; klassisch: Im Gebiet II bewegen sich die Teilchen mit geringerer Geschwindigkeit als im Gebiet I. (keine Reflexion)

$$E_{\mathrm{kin},1} = E_{kin,2} + E_0 \quad \Rightarrow \quad E_{\mathrm{kin},1} > E_{\mathrm{kin},2}$$

Quantenphysikalisch:

Gebiet I:

$$\psi_1 = Ae^{ikx} + \underbrace{Be^{-ikx}}_{\text{Reflexion}}$$

Gebiet II: $E > E_0$

$$k'^{2} = \frac{2m(E - E_{0})}{\hbar^{2}} \ge 0$$
$$\frac{d^{2}\psi_{2}}{dx^{2}} + k'^{2}\psi_{2} = 0$$

Lösung: harmonischer Oszillator (im Gebiet II nach rechts fliegendes Teilchen)

 $\psi_2(x) = C \cdot e^{ik'x}$ ebene Welle, keine abklingende exp. Funktion

Stetigkeit, Differenzierbarkeit angenommen (x = 0):

$$\Rightarrow A + B = C, \qquad k(A - B) = k' \cdot C$$
$$\Rightarrow B = \frac{k - k'}{k + k'} \cdot A \neq 0 \quad (\text{weil } k \neq k')$$

d.h. quantenmechanisch gibt es eine reflektierte Welle (Teilchen), obwohl die Bewegung "über den Berg" erfolgt; gilt allgemein bei *bei Potentialänderungen*.

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A \cdot \left[e^{ikx} + \frac{k - k'}{k + k'} \cdot e^{-ikx} \right] \\ \psi_2(x) &= \frac{2k}{k + k'} \cdot A \cdot e^{ik'x} \end{aligned}$$

(Vorsicht war berechtigt)

- 1. Fall: $E < E_0$: Tunnel–Effekt
- 2. Fall: $E > E_0$: Reflexion *immer* im Falle von Potentialänderungen

VI.4 Teilchen in einem unendlichen tiefen Potentialkasten

$$E_{pot} (x \le 0) \rightarrow \infty$$

$$\psi_1 \equiv 0$$

$$E_{pot} = 0$$

$$0 < x < a$$

$$H$$

$$x = 0$$

$$x = a$$

$$E_{pot} (x \ge a) \rightarrow \infty$$

$$a \text{ Breite des Topfes}$$

$$\psi_3 \equiv 0$$

$$H$$

keine Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Teilchen für $x \leq 0$ und $x \geq a$

Abbildung VI.8: Unendlich tiefer Potentialkasten

Modell für Elektronen im Festkörper (vgl. Abb. VI.8) Elektronen im H-Atom (Elektron und Proton; Abb. VI.9)



Abbildung VI.9: COULOMB-Potential; Elektronen im H-Atom

Atome im Molekül (Potential des harmonischen Oszillators), etwa H_2 -Molekül (Abb. VI.10) Nukleonen im Kern (Protonen, Neutronen)


Abbildung VI.10: H_2 –Molekül



Abbildung VI.11: Nukleonen im Kern

Gebiet I und III: $\psi \equiv 0$, keine Aufenthaltswahrscheinlichkeit Gebiet II:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \qquad E_{\rm pot} = 0$$
$$k^2 = \frac{2m \cdot E}{\hbar^2}$$

Lösungsansatz: (Bewegung in beiden Richtungen angenommen, Reflexion an den Wänden)

$$\psi(x) = A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx}$$

Unendlich tiefes Potential; Randbedingungen:

1) $\psi(x=0) = 0, A+B=0 \Rightarrow A=-B$ $\psi(x) = A \cdot \left[e^{ikx} - e^{-ikx}\right] = 2iA \cdot \sin kx$

 \Rightarrow stehende Welle \equiv stationärer Zustand (Zeitabhängigkeit ist rein harmonisch)

2)
$$\psi(x = a) = 0$$

 $2iA \cdot \sin ka = 0 \quad \Rightarrow \quad ka = n \cdot \pi, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$

n ist Quantenzahl!

$$k = \frac{n \cdot \pi}{a} \quad \Rightarrow \quad p = \hbar k = \frac{n\pi\hbar}{a}$$

In diesem Spezialfall dieses einfachen Potentials ist der Impuls quantisiert (Vielfache von $\frac{\pi\hbar}{a}$)

$$\Rightarrow \qquad E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}$$

Die Energie ist quantisiert (Vielfache einer kleinsten Energie $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$)

Es gibt eine minimale Energie E_1 (Nullpunktenergie).

In der klassischen Physik ist die Energie beliebig, es gibt keine Quantenzahl und die minimale Energie $E_{\min} \equiv 0.$

Nullpunktenergie gibt es auch am absoluten Nullpunkt (T = 0 K) (quantenmechanische Energie)

$$E_n: E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \qquad E_n \propto n^2$$
$$E_2 = 4E_1$$
$$E_3 = 9E_1$$

Niveauschema (Energieschema): Abb. VI.12

Wie versteht man die Nullpunktenergie?

Ortsunschärfe im Topf: $\Delta x \sim a$ Impulsunschärfe: $\Delta p \sim 2p$ (von links nach rechts: \vec{p} ; rechts nach links: $-\vec{p}$)

 $\Delta x \cdot \Delta p \sim h$ (HEISENBERGSche Unschärferelation)

 $a \cdot 2p \sim h, \qquad p \sim \frac{\pi\hbar}{a}$



Abbildung VI.12: Niveau–Schema

$$E \cong \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \equiv E_1$$

HEISENBERGsche Unschärferelation war eine Folge der DE BROGLIE–Beziehung; die Nullpunktenergie ist eine Folge der HEISENBERGschen Unschärferelation.

Basis:

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} E = \hbar \omega$$
 für Licht und Teilchen

weiteres Beispiel: $E_{\rm pot} = \frac{1}{2} \cdot m \omega^2 x^2$ (harmonischer Oszillator)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} \cdot m\omega^2 x^2 \psi = E\psi \text{ ist zu lösen}$$

 \Rightarrow HERMITESChe Polynome $\psi(x)$

Energieeigenwerte E_n :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \hbar\omega \propto n$$

linear in der Quantenzahl n (äquidistante Zustände; $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$). Dreidimensionaler Potentialkasten:

Kanten eines Quaders von a, b, c, in jeder Richtung Quantisierung.

Impuls:
$$p_x = \frac{\pi \hbar n_x}{a}$$
, $p_y = \frac{\pi \hbar n_y}{b}$, $p_z = \frac{\pi \hbar n_z}{c}$

3 Quantenzahlen (typisch für dreidimensionale Potentiale); $n_x, n_y, n_z \ge 1$, weil in jeder Richtung eine Nullpunktenergie auftritt.

Energieeigenwerte:

$$E = \frac{1}{2m} \cdot p^2 = \frac{1}{2m} \cdot \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}\right)$$



Abbildung VI.13: äquidistante Zustände

Eigenfunktion:

 $\psi \propto \sin \frac{n_x \pi x}{a} \cdot \sin \frac{n_y \pi y}{b} \cdot \sin \frac{n_z \pi z}{c}$

(wie eingespannte Saite; Resonator) Wichtig: 3 Quantenzahlen für dreidimensionale Potentiale. Neues Problem: Entartung (a = b = c): Würfel

$$E_n = \underbrace{\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}}_{E_0} \cdot \underbrace{\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)}_{n^2} \propto n^2$$

 E_n hängt nur noch von einer Quantenzahl ab (Entartung).

	Energie	Kombination	Entartung sgrad
Grundzustand	$3E_0$	(1, 1, 1)	1
1. angeregter Zustand	$6E_0$	(2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)	3
2. angeregter Zustand	$9E_0$	(2,2,1), (2,1,2), (1,2,2)	3

Verschiedene Kombinationen von n_x, n_y, n_z führen auf die selbe Energie E_n .

VI.5 Wasserstoffatom und Aufbau des Periodischen Systems

VI.5.1 Vorbemerkung

Atome bestehen aus einem Atomkern (positiv) und der Elektronenhülle (negativ). \Rightarrow neutrale Atome. Kern: $r_{\text{Kern}} \approx 10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm} = 1 \text{ femtometer} = 1 \text{ Fermi}$ Hülle: $r_{\text{Hülle}} \approx 10^{-8} \text{ m}$

Kerne bestehen aus Protonen (p, positiv) und Neutronen (n).

Kerne werden charakterisiert durch eine Massenzahl ${\cal A}$ (ganze Zahl)

A = N + Z

mit der Zahl der Neutronen N und der Zahl der Protonen Z (bzw. der Elektronen)

Zheißt die $\mathit{Ordnungszahl}$ der Elemente (charakterisiert die Stellung im Periodischen System der Elemente)

Beispiele: Symbolschreibweise: ${}^{A}_{Z}$ Symbol_N leichter Wasserstoff: ${}^{1}_{1}H_{0}$ (A = 1, 1 Proton; Z = 1; N = 0, kein Neutron) schwerer Wasserstoff (Deuterium): ${}^{2}_{1}H_{1}$ (A = 2; Z = 1; N = 1)Tritium: ${}^{3}_{1}H_{2}$ *Isotope* (gleiches Element, aber verschiedene Zahl von n) Helium: ${}^{4}_{2}He_{2} \equiv {}^{4}He$ (α -Teilchen; Kerne) Uran: ${}^{235}_{92}U_{143}$

 $\mathit{Frage:}$ Warum gibt es die Vielzahl der Elemente, wenn es nur 3 Teilchen gibt, die alle diese Teilchen aufbauen?

3 Bausteine: Protonen, Neutronen, Elektronen Antwort: PAULI–Prinzip (Fermionen, haben halbzahligen Spin)

VI.5.2 H-Atom

(SCHRÖDINGER-Gleichung, BOHRsches Atommodell) Problemlösung in Etappen immer höherer Präzision:

a) Bohr

- b) SCHRÖDINGER-Gleichung
- c) DIRAC-Gleichung (Spin $\frac{1}{2}\hbar$)
- d) Quantenelektrodynamik



Abbildung VI.14: Aufenthaltswahrscheinlichkeiten (Z = 1)

 $\Rightarrow |\psi(\vec{r})|^2$, Eigenwerte der Energie

$$\vec{F_c}(\vec{r}) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \hat{r}$$

Potentielle Energie:

$$E_{\rm pot} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

SCHRÖDINGER-Gleichung in drei Dimensionen (verlangt 3 Quantenzahlen):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot \psi(\vec{r}) = E \cdot \psi(\vec{r})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

kugelsymmetrisch (nur abhängig vom Betragr)
 \Rightarrow Polarkoordinaten

 $\begin{aligned} x &= r \cdot \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \cdot \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cdot \cos \theta \end{aligned}$

mit dem Polarwinkel θ und dem Azimutwinkel ϕ



Abbildung VI.15: Polarkoordinaten

 $\phi(\vec{r}) = \phi(r,\theta,\phi)$

 $\begin{aligned} dx &= \sin\theta\cos\phi \, dr + r\cos\theta\cos\phi \, d\theta - r\sin\theta\sin\phi \, d\phi \\ dy &= \sin\theta\sin\phi \, dr + r\cos\theta\sin\phi \, d\theta + r\sin\theta\cos\phi \, d\phi \\ dz &= \cos\theta \, dr - r\sin\theta \, d\theta \end{aligned}$

Auflösen nach $dr,\,d\theta,\,d\phi$

 $dr = \sin\theta\cos\phi \, dx + \sin\theta\sin\phi \, dy + \cos\theta \, dz$ $r \, d\theta = \cos\theta\cos\phi \, dx + \cos\theta\sin\phi \, dy - \sin\theta \, dz$ $r\sin\theta \, d\phi = -\sin\phi \, dx + \cos\phi \, dy$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\begin{split} \frac{\partial}{\partial x} &= \sin\theta\cos\phi\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\cos\theta\cos\phi\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\sin\phi\cdot\frac{\partial}{\partial\phi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\sin\phi\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\cos\theta\sin\phi\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\phi} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\cdot\sin\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} \\ - \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\cdot\left(r^2\cdot\frac{d\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\cdot\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{d\phi^2}\right] - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0r}\cdot\psi(\vec{r}) = E\cdot\psi(\vec{r}) \end{split}$$

Quantenmechanik:

Impuls wird durch einen Operator ersetzt

$$p \Rightarrow \mathbb{P} = -i\hbar\vec{\nabla} \left(\mathbb{P}_x = -i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Drehimpuls
operator (Drehimpuls $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p})$

$$\begin{split} L &\Rightarrow \quad \vec{\mathbb{L}} = \vec{r} \times \vec{\mathbb{p}} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla} \\ \vec{\mathbb{L}^2} = \mathbb{L}_x^2 + \mathbb{L}_y^2 + \mathbb{L}_z^2 = \hbar^2 \cdot \left[\left(y \cdot \frac{\partial}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \cdots \right] \\ \vec{\mathbb{L}^2} = -\hbar^2 \cdot \left[\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \cdot \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2}{d\phi^2} \right] \\ \hline -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(r^2 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{2mr^2} \cdot \vec{\mathbb{L}^2} \cdot \psi(\vec{r})}_{\text{Drehimpulsabhängigkeit}} \underbrace{-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{V(r)} \cdot \psi = E \cdot \psi \end{split}$$

Lösung durch Separation der Variablen:

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r) \cdot Y(\theta,\phi)$$

(Radialfunktion R(r), Winkelfunktion $Y(\theta,\phi))$ Teilchen durch $R\cdot Y\equiv \psi$

$$\underbrace{\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(r^2 \cdot \frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} \cdot \left(E - V(r)\right)}_{f^*(\theta,\phi)} = \underbrace{-\frac{1}{Y} \cdot \left[\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \cdot \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right]}_{f^*(\theta,\phi)} \equiv \lambda$$

 mit

$$\frac{\partial f(r)}{\partial \theta} = 0 \quad f \text{ ist konstant}, \qquad \frac{\partial f^*}{\partial r} = 0 \quad f^* \text{ ist konstant}$$

Die linke Seite hängt nicht von θ , ϕ ab, die rechte Seite hängt nicht von r ab, deshalb sind beide Seiten gleich einer Konstanten λ .

Ergebnis: Gewöhnliche Differentialgleichung für R(r):

$$\frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot \left(r^2 \cdot \frac{dR(r)}{dr}\right)\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}(E-V) - \frac{\lambda}{r^2}\right] \cdot R(r) = 0$$

Setzen $R(r) = \frac{u(r)}{r}$

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left(r^2 \cdot \frac{dR}{dr}\right) = \frac{u''}{r}, \qquad u'' = \frac{d^2u}{dr^2}$$

Neue (radiale) SCHRÖDINGER-Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left(V(r) + \frac{\hbar^2 \lambda}{2mr^2}\right) \cdot u(r) = Eu(r)$$



Abbildung VI.16: Rotation und überlagerte Oszillation

Mechanik: siehe Abb. VI.16 Energiesatz:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}_{\text{kin. Energie}}_{\text{der Radialbewegung}} + V(r) + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{\substack{\text{kin. Energie} \\ \text{der Rotation} \\ (\text{Zentrifugalenergie})}}_{\text{(Zentrifugalenergie)}} = E_{\text{ges}}$$

Lösungen der radialen SCHRÖDINGER-Gleichung sind LAGUERRE–Polynome \Rightarrow Wellenfunktion, Eigenwerte der Energie.

$$\lambda = l(l+1), \qquad l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Drehimpuls ist gequantelt!

$$\mathbb{L}^2 = \hbar^2 \cdot l(l+1)$$
$$\mathbb{L} = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$$

2. Gleichung (Winkelgleichung)

$$\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \cdot \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + \lambda Y = 0$$
$$\boxed{\mathbb{L}^2 Y(\theta, \phi) = \lambda \hbar^2 \cdot Y(\theta, \phi)}$$

Kugelfunktion: $Y(\theta, \phi)$ Separieren erneut:

$$Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta) \cdot \Phi(\phi)$$

$$\underbrace{\frac{1}{\Theta} \cdot \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) + \lambda \sin^2 \theta}_{\text{nur von } \theta \text{ abhängig}} = \underbrace{-\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}}_{\text{nur von } \phi \text{ abh.}}$$

Beide Seiten sind gleiche einer Konstanten m^2 .

Ergebnis: 2 weitere gewöhnliche Differentialgleichungen für $\Theta(\theta)$ und $\Phi(\phi)$

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\cdot\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\cdot\Theta(\theta)=0$$

Lösungen: zugeordnete LEGENDRE–Polynome

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2\Phi(\phi) = 0$$

Jede dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen enthält eine Quantenzahl des Wasserstoffatoms

$$n,\ l,\ m$$

n: Hauptquantenzahl, l: Drehimpuls-Quantenzahl, m: magnetische Quantenzahl Der Wertebereich bleibt zu diskutieren!

Der wertebereich bleibt zu diskutieren!

Die Wellenfunktionen müssen normiert werden:

$$\int d^2 \vec{r} \, |\psi(\vec{r})|^2 = 1$$

(irgendwo ist das Elektron)

$$d^3 \vec{r} = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$\begin{split} & 0 \leq r \leq \infty \\ & 0 \leq \theta \leq \pi \\ & 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ & \psi(\vec{r}) = R(r) \cdot Y(\theta, \phi) \end{split}$$

Getrennte Normierung für Radial- und Winkelfunktion

$$\Rightarrow W = \int_{0}^{\infty} r^{2} |R(r)|^{2} dr = 1 \qquad \text{Wahrscheinlichkeit}$$
$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2\pi} \sin \theta \ d\theta \ d\phi \ |Y(\theta, \phi)|^{2} = 1$$

 $r^2 |R(r)|^2$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\frac{dW}{dr} = r^2 |R(r)|^2$$

 $dW = r^2 |R(r)|^2 dr$ ist die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron zwischen dem Radius r und r + dr zu finden.

3 Quantenzahlenn,l,m

1. Quantenzahl, Hauptquantenzahl zählt Energieniveaus ab (BOHR)

 $n = 1, 2, 3, \ldots$ natürliche Zahl

2. Quantenzahl, Bahndrehimpulsquantenzahl

 $\lambda = l(l+1)$

$$\begin{split} l &= 0, 1, \dots, \underbrace{n-1}_{l_{\max}} \qquad o.B. \\ L^2 &= l(l+1)\hbar^2 \\ \hline |\vec{L}| &= \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar \end{split} \quad (\text{Bohr}) \ |\vec{L}| = n \cdot \hbar \end{split}$$

Wenn l sehr groß wird:

$$\sqrt{l(l+1)\hbar} \Rightarrow n\hbar$$

Betragsquantelung des Drehimpulses

3. Quantenzahl:

Weil \vec{L} Vektor ist, muss auch die Richtung gequantelt sein (Richtung durch äußeres Feld festgelegt, z.B. \vec{B} -Feld)

$$m_l = -l, (-l+1), \dots, 0, \dots, (+l-1), +l$$

 $-l \le m_l \le l$

insgesamt (2l+1) Werte

$$L_z = m_l \cdot \hbar$$

 \hbar hat die Dimension eines Drehimpulses.

z–Komponente des Drehimpulses ist gequantelt.



Abbildung VI.17: Gequantelte Richtungen des Bahn-Drehimpulses

Beispiel: l = 2Betrag von $|\vec{L}| = \sqrt{2 \cdot 3}\hbar = \sqrt{6}\hbar$

$$\cos \theta = \frac{m_l \hbar}{\sqrt{l(l+1)\hbar}} = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}$$
 sind erlaubte Winkel

Quantitatives Modell (Bohrsches Atommodell)

BOHRsches Postulat:

$$2\pi r = n\lambda$$



Abbildung VI.18: BOHRsches Atommodell

(Kreisumfang \equiv Vielfaches der DE BROGLIE-Wellenlänge λ)

$$2\pi r = n\lambda = \frac{n\hbar}{p}$$

$$L = rp = \frac{n\hbar}{2\pi} = \underbrace{n\hbar}_{\text{Bohrsche Bed.}}$$
Ursprung der Def. $\hbar \quad \left(\frac{h}{2\pi} = \hbar\right)$

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad \text{Schroedingergleichung}$$

- n Hauptquantenzahl gefunden (bei BOHR kommt nur n vor)
- 1. Ergebnis unseres Modells

$$L = mvr = n\hbar \Rightarrow v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2}$$

2. Ergebnis: Kräftegleichgewicht und "Bahnradien"

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow mv^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

 v^2 einsetzen

$$r = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{\hbar^2}{Ze^2m} \cdot n^2$$

 $r_B \propto n^2$ Bohrscher Radius (mittlerer Abstand der Elektronen vom Ursprung)

Z = 1, n = 1 (Grundzustand des *H*-Atoms) $r_1 = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{\hbar^2}{me^2}$ Kombination von 3 Naturkonstanten

 $r_1 = 0.529 \cdot 10^{-10} \,\mathrm{m} = 0,5 \,\mathrm{\AA}$ "klassischer" Elektron
enradius, nicht der Radius des Elektrons

gibt Größenordnung für Atome an

3. Ergebnis: Energien im BOHRschen Atommodell

$$E_{\rm ges} = E_{\rm kin} + E_{\rm pot} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

r einsetzen

$$E_{\rm ges} = \underbrace{-\frac{Z^2 e^4 m c^2}{32 \pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2 c^2}}_{\rm Rydberg-K.} \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{E_{\rm ges} \propto \frac{Z^2}{n^2}}$$

Z = 1, n = 1 $E_{\rm ges} = \frac{1}{2}\alpha^2 mc^2$ $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$

 α SOMMERFELD-Konstante (Kombination von 3 Naturkonstanten)

Wenn $4\pi\varepsilon_0\hbar c = 1$ gesetzt wird $\implies \alpha = e^2$

 α definiert die Stärke der elektromagnetischen Kraft

Energie der Elektronenübergänge

mit der Emission von Photonen (UV, sichtbar, IR)

$$\Delta E = E_{n_2} - E_{n_1} = -13.61 \,[\text{eV}] \left[\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right]$$

 ΔE : Photonenenergie

 E_{n_2}, E_{n_1} : Hauptquantenzahl \boldsymbol{n} der Niveaus

BALMER-Serie: $n_1 = 2 \leftarrow n_2 = 3, 4, 5, \dots$ (1895) LYMAN-Serie: $n_1 = 1 \leftarrow n_2 = 2, 3, \dots$



Abbildung VI.19: Übergänge zwischen den Energieniveaus

Photon hat Drehimpuls: $|\vec{L}| = 1 \hbar$ l = 0 (kein Bahndrehimpuls): Bahn oszilliert

Der Elektronenspin

- wird in die SCHRÖDINGER-Gleichung willkürlich eingefügt
- in DIRAC-Gleichung erscheint der Spin automatisch

• Spin relativistischen Ursprungs

Bahndrehimpuls:

$$|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$$
 $L_z = m_l \cdot \hbar$

Eigendrehimpuls (Spin)

$$|\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)} \cdot \hbar \qquad S_z = m_s \cdot \hbar$$

Experiment zeigt, dass Spinquantenzahl $s = \frac{1}{2}$

$$(2s+1)$$
-Einst. $m_s = \pm \frac{1}{2}$



Abbildung VI.20: Gequantelte Richtungen des Elektronen-Drehimpulses

 $\stackrel{\rm Begriff}{\Longrightarrow} {\rm halbzahliger} \ {\rm Spin} \ ({\rm Fermionen})$

Fermionen: halbzahliger Spin

$$s = \frac{1}{2}$$
 $|\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)} \cdot \hbar$

gehorchen dem PAULI–Prinzip Bosonen: ganzzahliger Spin

$$s=0,1,2,\ldots$$

PAULI-Prinzip: Fermionen dürfen nicht in allen Quantenzahlen übereinstimmen ohne PAULI-Prinzip säßen alle Elektronen im Grundzustand $(n = 1, l = 0, m_l = 0, m_s = \pm \frac{1}{2})$

Einfluss des Spins des Elektrons auf das Niveauschema des H-Atoms BIOT-SAVART*sches Gesetz* (\vec{B} -Feld eines stromdurchflossenen Leiters; Abb. VI.21)

$$\oint I \, \vec{dl} = e \cdot \vec{v} \qquad \text{(Erinnerung: } I \cdot l = q \cdot v\text{; Ladung } q\text{)}$$
$$\vec{B} = \mu_0 e \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3}, \qquad \vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$$



Abbildung VI.21: BIOT-SAVARTsches-Gesetz; klassische Elektrodynamik

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot e}{4\pi r^3 m_e} \cdot \vec{L}$$

subtrahiert von e-Spin

H-Atom (klassisch: rotierendes Elektron, hat Bahn-Drehimpuls \vec{L} , erzeugt $\vec{B}_L = \frac{\mu_0 \cdot e}{4\pi r^3 m_e} \cdot \vec{L}$)

Der Spin des Elektrons $(m_s = \pm \frac{1}{2})$ orientiert sich (richtet sich aus) bezüglich des \vec{B} -Feldes, das von dem eigenen Bahndrehimpuls erzeugt wird.

 \Rightarrow Parallele $(m_s = +\frac{1}{2})$ und antiparallele $(m_s = -\frac{1}{2})$ Orientierung bezüglich \vec{L} .

Niveauschema des H-Atoms: $n L_j$; $j = l \pm \frac{1}{2}$; (Abb. VI.22)



Entartung wird teilweise aufgehoben (Entartung bezüglich konstanten j); Ergebnis der DIRAC-Gleichung (relativistisch korrekt), e-Spin erscheint automatisch; Effekt der Spin-Bahn-Kopplung (es liegt kein äußeres \vec{B} -Feld vor!)

Abbildung VI.22: Niveauschema des H-Atoms

 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \qquad |\vec{J}| = \sqrt{j(j+1)} \cdot \hbar$ 2j + 1 Einstellungen sind möglich $j = \frac{1}{2} \implies 2j + 1 = 2$ Feinstruktur der Spektrallinien (Aufspaltung relativ klein gegenüber dem nächsthöheren n)

Nomenklatur der Energie-Niveaus

$$n(S, P, D, \ldots)_j$$

n: Hauptquantenzahl; S, P, D, . . .: charakterisieren die Bahndrehimpuls-Quantenzahl; j: Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl (Bahn + Spin); $j = l \pm \frac{1}{2}$ Bei Mehrelektronensystemen:

$$\begin{split} \vec{S} &= \sum \vec{s_j}, \qquad \vec{L} = \sum \vec{L_i}, \qquad \vec{J} = \vec{S} + \vec{L} \\ \vec{j_i} &= \vec{s_i} + \vec{l_i}, \qquad \vec{J} = \sum \vec{j_i} \end{split}$$

VI.5.3 Periodensystem (Aufbau der Elemente)

Mehrelektronensysteme (Z), Z: Ordnungszahl

Energieabschätzung:
$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \propto \frac{Z^2}{n^2}$$

Wechselwirkungsenergie zwischen Elektronen: $\sum_{i>j} \sum_j \frac{e^2}{r_{ij}}, \quad |\vec{r_{ij}}| = |\vec{r_i} - \vec{r_j}|$

3 Bausteine: Elektronen, Protonen, Neutronen
Hülle, Kern
Fermionen
$$s = \frac{1}{2}$$

PAULI-Prinzip (gilt nur für Fermionen, halbzahliger Spin):

Jeder Energiezustand kann nur durch maximal 2 Elektronen besetzt werden $(m_s = \pm \frac{1}{2})$ "Spin auf", "Spin ab" – Zustände ("spin up", "spin down")

 $\label{eq:Andere Formulierung: Jedes Fermion muss sich in mindestens einer Quantenzahl von den anderen unterscheiden.$

H-Atom: 4 Quantenzahlen $n, l, m_l, m_s = \pm \frac{1}{2}$

Ohne PAULI–Prinzip gäbe es nur "1 Element". In diesem Falle wäre die Ionisationsenergie

 $E \sim 13, 6 Z^2 \text{ eV}$

(COULOMB-Abstoßung der e^- nicht berücksichtigt)

Abschätzung: ~ 10 eV entsprechen 10⁵ Kelvin (E = kT, $k = 8,62 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}}$: BOLTZMANN-Konstante) Es würde kein Leben geben bei solchen Temperaturen.

Vorbemerkung:

Frage: Wie viele e^- kommen zur Quantenzahl n vor?

$$2 \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \underbrace{(2l+1)}_{m_l} = 2n^2 \text{ Elektronen}$$

Diskutieren Aufbau der Elemente

1) H-Atom

Nomenklatur:

 $n^{2S+1}L_J$

n: Hauptquantenzahl; 2S + 1: Spin des Elektrons $\frac{1}{2}$; L: Bahndrehimpuls des Elektrons (l = 0, 1, 2, ...); J: Gesamtdrehimpuls des Elektrons $J = L \pm \frac{1}{2}$

 $S = \frac{1}{2}$; 2S + 1 = 2: Multiplizität

2) *He*-*Atom:* $Z = 2, 2e^{-}$

1s-Orbital für $2e^{-}$: $(1s)^2 \mid 1$

Spin der 2 Elektronen:

 $\uparrow \uparrow S = 1 \implies 2S + 1 = 3 \quad \text{(Triplett)}$ $\uparrow \downarrow S = 0 \implies 2S + 1 = 1 \quad (\text{Singulett})$

Antiparallele Spins der e^- : $\uparrow \downarrow = 1 \, {}^1S_0$ (Grundzustand des He)

Parallele Spins: $\uparrow\uparrow$ 1 ${}^{3}S_{1}$ (1. angeregter Zustand des He) existient nicht, weil alle Quantenzahlen der 2 Elektronen übereinstimmen würden

$$(n = 1, l = 0, m_l = 0, m_s = +\frac{1}{2})$$
, Folge des PAULI-Prinzip

3) Li-Atom (Z = 3)

 $(1s)^3$ verboten

Grundzustand $(1s)^2(2s)^1$ ($(2s)^1$: Valenzelektron, schwach gebunden)

 $Li \rightarrow Li^+ + e^- \Rightarrow$ hohe chemische Reaktivität $(2s)^1 = 2 \, {}^2S_1$

4) Kohlenstoff (Z = 6)Konfiguration:

$$(1s)^2 (2s)^2 \underbrace{(2p)^2}_{2^3 P_0}$$

Elektronenspin parallel (Abb. VI.23)

 $2S+1=3 \qquad \qquad \stackrel{\uparrow}{\underset{S=1}{\overset{\downarrow}{\underset{L=1}{\overset{}}{\underbrace{L}}{\overset{}}{\underbrace{L}1}{\overset{}}{t$ J = 0

Abbildung VI.23: paralleler Elektronenspin beim C-Atom

Die Natur bevorzugt eine andere Konfiguration:

 $-\overset{|}{\overset{|}{\overset{|}{}}}$

 sp^3 -Hybridisierung (4 e^-); 4 e^- energetisch gleichberechtigt.

Basis allen Lebens (organische Chemie)

Schalenstruktur wird für höhere Z komplizierter, führt auf die bekannten Elemente mit ihren spezifischen chemischen Eigenschaften.

 $^{^1\}mathrm{Hochzahl}$ in $(1s)^2$ ist keine Potenz, sondern gibt die Zahl der e^- in diesem Niveau an.

Kapitel VII

Bänderstruktur des Festkörpers

VII.1 Bindungstypen

Kristalle bestehen aus einem weitgehend regelmäßigen Gitter (z.B. kubisch, kubisch-flächenzentrisch etc.)



Abbildung VII.1: Kristall (kubisch-flächenzentriert)

Frage: Was hält (bindet) die Kristalle zusammen? (Kristalle sind neutral) Antwort: elektromagnetische Kräfte; Anziehungskraft zwischen e^- -Hüllen und den positiven Kernen.

Verschiedene Typen: (\Rightarrow Chemie, Atome \rightarrow Molekül) hier: Bindung von Atomen (Molekülen) zu Festkörpern (Kristalle)

a) Ionische Bindung (zwischen geladenen Ionen, Abb. VII.2), z.B. $NaCl \rightarrow Na^+ + Cl^-$



Abbildung VII.2: Ionische Bindung (*NaCl*-Kristall)

Ionen sind geladen; Ionenkristalle sind schlechte elektrische und Wärmeleiter (in Lösung $(H_2O) \Rightarrow$ Elektrolyse; $Na^+ + H_2O \Rightarrow$ Hydratisierung)

b) kovalente Bindung, z.B. Diamant

Elektronen
wellenfunktionen überlappen sich, d.h. Elektronen gehören zu mehreren Kernen; Prototyp:
 ${\cal H}_2$ (Abb. VII.3)



 H_2

Abbildung VII.3: kovalente Bindung beim H_2 -Molekül



keine freien Elektronen (keine freie Ladungsträger)

Abbildung VII.4: Tetraeder beim C-Atom (Diamant)

Beim Kohlenstoff: Diamant, Graphit, Fullerene: $\underbrace{C_{60}, C_{70}}_{\text{Fußbälle}}$

Diamant: schlechter elektrischer Leiter Graphit: relativ guter elektrischer Leiter (die Bindung ist schwach zwischen den Atom-Ebenen)

c) Metallische Bindung, z.B. bei Metallen (Cu, Au, Ag, Na, ...)

Valenzelektronen (oberste Elektronen im höchsten Energieniveau werden leicht abgegeben; $Li \rightarrow Li^+ + e^-$, e^- schwach gebunden)



Abbildung VII.5: Metallische Bindung (Na^+)

gute Leiter, quasifreie Elektronen (Abb. VII.5)

d) VAN-DER-WAALS-Kristalle, z.B. neutrale Atome, organische Verbindungen, Benzol (Abb. VII.6)
 Dipol-Dipol-Wechselwirkung, Bindungen sehr schwach (niedrige Schmelzpunkte)
 H₂O: H-Brückenbindung (Abb. VII.7) bestimmt die spezifischen Eigenschaften des Wassers (⇒ Leben!)

VII.2 Periodisches Potential (qualitativ)

2 Atome:

$$V(r_1, r_2, r) = \underbrace{-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}}_{\text{Kern-}e^-} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \underbrace{+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{\substack{\text{Abstofbung}\\ \text{der Ionen}}} + \text{Abstofbung der } e^-$$

 $qualitative \ Diskussion:$



Abbildung VII.6: VAN-DER-WAALS-Kräfte beim Benzol



Abbildung VII.7: Wasser mit Dipolmoment



Abbildung VII.8: Periodisches Potential



Abbildung VII.9: Periodische Potentiale und Tunneleffekt

Elektronen mit E_1 :nicht frei, geringe (weil zu breiter Berg) Wahrscheinlichkeit des Tunnelns;
lokalisierte Elektronen (Wellenfunktion wie bei einzelnen Atomen)Elektronen mit E_2 :höhere Tunnelwahrscheinlichkeit, weniger lokalisiert
(gehören mehreren Atomen an)Elektronen mit E_3 :freie Elektronen gehören dem Festkörper (Kristall) an; sie bestimmen
die Eigenschaften des Kristalls, (elektrische Eigenschaften, Wärmeleitfähigkeit,
Schmelzpunkt, Siedepunkt, Kristallstruktur, etc.; Valenzelektronen)

Erinnerung: Gekoppelte Pendel (Abb. VII.10)



Abbildung VII.10: 2 Pendel (Federn): 2 Fundamentalschwingungen

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}} \neq \omega_0 \qquad \text{(gekoppelt)}$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \qquad \text{(nicht gekoppelt)}$$

Im dreidimensionalen Fall: 3N Frequenzen; (N ist im Falle des Festkörpers ~ $N_A \sim 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{Mol}}$) Die Niveaus liegen sehr dicht.

Aus VI.4 bekannt:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \cdot (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2), \quad L: \text{ Länge des Topfes (Kristall)}$$



Aufspaltung der Frequenzen





Abbildung VII.12: n-fache Aufspaltung der Frequenzen bei n Atomen

Genauer: Aus Atomzuständen werden dichtliegende Bänder.

PAULI-*Prinzip:* Fermionen (Spin $\frac{1}{2} \cdot \hbar$) \equiv Elektronen dürfen nicht in allen Quantenzahlen übereinstimmen. In einem *Festkörper* (unendlich tiefes Potential) kann jedes Niveau nur zwei Elektronen aufnehmen (Spin up und Spin down)

Die Bänder enthalten N Niveaus. Letztlich müssen diese Niveaus mit Elektronen der Reihe nach aufgefüllt werden.



links: kleiner Topf (a klein), gut getrennte Niveaus rechts: a = L groß, sehr dicht liegende Zustände (a makroskopisch)

Abbildung VII.13: unendlich tiefer Potentialtopf und Energiebänder

Das letzte mit e^- gefüllte Band heißt Valenzband. (Vgl. Abb. VII.14

Diese energetisch höchsten Bänder bestimmen die Eigenschaften der Festkörper. (insbesondere die Leitungseigenschaften)

Isolatoren, Halbleiter (Si, Ge, GaAs), Leiter (Metalle)



Abbildung VII.14: Valenzband (Leitungsband) bei angelegtem elektrischen Feld

VII.3 Modell freier Elektronen im Festkörper

Ein einfaches Modell ohne Berücksichtigung des Gitters (regelmäßig angeordnete Atomrümpfe; Abb. VII.15).



Abbildung VII.15: (zunächst vernachlässigte) Periodizität im Gitter

Elektronen: ebene Wellen $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \quad \Rightarrow \quad E(\vec{k}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$$
$$\left|\psi_{\vec{k}}(\vec{r})\right|^2 = 1$$

Die Elektronen sind im Festkörper eingesperrt: unendlich tiefes Potential

 $\psi_{\vec{k}}(0) = \psi_{\vec{k}}(L) = 0$ L: Länge des Kristalls (eindimensional)

 $k_x \cdot L = n_x \cdot \pi$ (vgl. Abschnitt IV.4)

 $L = N \cdot a$; N Atome im Abstand a (lineare Kette), $n_x = 1, 2, \dots, N$ (N Atome spalten N-fach auf) N sehr groß $(L_n \sim 6 \cdot 10^{23} \frac{\text{Atome}}{\text{Mol}})$

 k_x praktisch kontinuierlich

$$k_x = \frac{n_x \cdot \pi}{N \cdot a}$$
 sind die erlaubten k_x -Werte
Wenn $n_x = N$ ist $k_x^{\max} = \frac{\pi}{a}$



Abbildung VII.16: $E(\vec{k})$ –Funktion bei vernachlässigter Periodizität

Das Band ist mit k_x^{\max} gefüllt \Rightarrow Bandgrenze Ergebnis des Modells "freier" Elektronen:

- 1) Bänder existieren, werden aufgefüllt $n_x, n_y, n_z = 1, ..., N$. Jede Quantenzahl wird mit 2 Elektronen besetzt (\uparrow Spin auf, \downarrow Spin ab der Elektronen; PAULI–Prinzip)
- 2) Es gibt keine Bandlücken (Eigenschaft dieses einfachen Modells)

Frage: Wie viele Elektronen sind in einem Band von $n_x, n_y, n_z = 1$ bis $E_{\max}(N)$ vorhanden?

$$g(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{\text{Zahl der Zustände}}{\text{inf. Energieintervall}}$$
 (vgl. Abb. VII.13)

 $\frac{dN}{dE}$ Niveaudichte ausrechnen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}, \quad n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \quad (\text{abstrakter } \vec{n} - \text{Raum})$$



1 Oktand enthält $N(E_n) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot n^2$

Abbildung VII.17: Abstrakter $\vec{n}\text{-}\mathrm{Raum}$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \cdot \underbrace{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)}_{n^2} \qquad (\text{vgl. IV.4})$$

$$N(E_n) = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2ma^2}{\pi^2\hbar^2} \cdot E_n\right)^{\frac{3}{2}} \quad V = a^3 \quad (\text{Würfel der Seitenlänge } a)$$

$$\frac{dN}{dE} = \frac{V}{6\pi^2\hbar^3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (2m)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{E}$$

$$g(E) = \frac{dN}{dE} \propto \sqrt{E}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{dN}{dE}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{dN}{dE}} \int$$

Bis E_0 wird das Band aufgefüllt.

Abbildung VII.18: Besetzungsfunktion

Faktor 2 noch ist noch anzubringen (wegen \uparrow , \downarrow):

 $\frac{dN}{dE} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \cdot (2m)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{E}$

Gesamtzahl der Elektronen pro Volumen:

$$n = \int_{0}^{E_0} g(e) \ dE = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{m^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3} \cdot E_0^{\frac{3}{2}}$$
$$n = \frac{\text{Teilchen}}{\text{cm}^3} = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Volumen}}$$

Wenn das Band nicht voll gefüllt ist (Leitungsband) \Rightarrow oberster Energiezustand, der noch besetzt ist \Rightarrow FERMI-Energie, FERMI-Kante

Wie groß ist die FERMI-Energie E_F (höchster besetzter Energiezustand in einem nicht vollgefüllten Band)?

$$E_0 = E_F$$
, $n = n_0$: Konzentration = $\frac{\text{Zahl der Elektronen}}{\text{Volumen}}$

 n_0 : Konzentration bei 0 K (absoluter Nullpunkt)

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot (3n_0\pi^2)^{\frac{2}{3}} \qquad \left(E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)$$

$$k_F = (3\pi^2n_0)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{FERMI-Impuls}$$

$$v_F = \frac{\hbar k_F}{m} = \frac{\hbar}{m} \cdot (3\pi^2n_0)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{FERMI-Geschwindigkeit an der FERMI-Kante}$$

$$T_F = \frac{E_F}{k} \quad k: \text{ BOLZMANN-Konstante}$$

Das Modell liefert zusätzlich eine Abschätzung für $E_F = f(n_0)$

VII.4 Elektronenbewegung in einem periodischen Potential

Das Gitter ist periodisch.

Die Wellenfunktion wird abgeändert: (freie Elektronen: $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = u(\vec{r}) \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

(wir modulieren die ebene Welle mit der Periodizität des Gitters) 1-dimensional:

$$\psi(x) = u(x) \cdot e^{ikx}$$
$$u(x+a) = u(x)$$
$$u(x+ma) = u(x), \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, a: \text{ Atomabstand}$$

 $\Rightarrow \hbar \vec{k}$ ist nur ein mittlerer Impuls.

$$E(k) \neq \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$
 (ist nur kin. Energie ohne $E_{\rm pot} \sim \frac{1}{r}$ zw. Rumpf und Elektronen)

Wir wissen, dass es Bandlücken gibt.

Frage: Was passiert an den Bandgrenzen?

Antwort: An den Bandgrenzen gibt es keine fortschreitenden Wellen mehr, sondern es bilden sich stehende Wellen aus (Bewegung der Elektronen unmöglich)

Ursache: BRAGGsche Reflektion

RÖNTGEN-*Beugung* (vgl. IV.4.5 und Abbildung IV.55) $2a \sin \theta = n \cdot \lambda$ für Verstärkung (Reflexe); konstruktive Interferenz

Übertragung auf Elektronenwellen:

Elektronen fallen senkrecht auf die Netzebenen fallen ($\theta = \frac{\pi}{2}$):

Abbildung VII.19: Reflexion von Elektronenwellen an der Grenzfläche

Der Gangunterschied zwischen 11' und 22': 2a \Rightarrow Phasendifferenz zwischen 11' und 22': 2ak_x maximale Verstärkung (konstruktive Interferenz): 2k_xa = 2 πn

$$k_x = \frac{n \cdot \pi}{a}$$
 \Leftarrow Werte der Bandgrenzen (*n* numeriert die Bänder)

Für diese Werte für k_x gibt es Totalreflexion (BRAGG-Reflexion) \Rightarrow stehende Welle (keine fortschreitende Welle)

BRAGGsche Totalreflexion ist die Ursache für die Entstehung der Bandlücken (keine freie Ausbreitung der Elektronen).

Geschwindigkeit der Elektronen in den Bändern: Gruppengeschwindigkeit:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \qquad E = \hbar\omega$$

 $v_g = \frac{1}{\hbar} \cdot \frac{dE(k)}{dk}, \quad E = E(k)$

An der Bandgrenze gibt es keine fortschreitende Wellenausbreitung mehr:

$$v_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dk} = 0$$
 (Steigung der $E(k)$ -Funktion ist null)

 \Rightarrow Die Tangente an die E(k)-Funktion ist horizontal!

Die Parabel $E(k) = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$ wird modifiziert durch diese horizontalen Tangenten an den Bandgrenzen $k = \frac{n\pi}{a}$, so, dass diese Lücken¹ entstehen, d.h. Energien, die die Elektronen nicht annehmen können.

VII.4.1 Quantitatives Modell des Festkörpers

periodisches Potential, Berücksichtigung des Gitters (KRONIG-PENNEY-Potential) \Rightarrow Bandlücken



a: Periode des Gitters (Atomabstand)

Abbildung VII.20: periodisches Potential

SCHRÖDINGER-Gleichung + Periodizität des Gitters \Rightarrow transzendente Gleichung:

$$\frac{Q^2 - K^2}{2QK} \cdot \sinh Qb' \sin Ka' + \cosh Qb' \cos Ka' = \cos k(a' + b')$$

Gebiet 1: $E = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} \Rightarrow K^2$ Gebiet 2: $Q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \cdot (V_0 - E)$



Abbildung VII.21: Potentialberg zwischen den Atomen

 $\psi(x) = u_k(x) \cdot e^{ikx}; u_k(x+a)u_k(a)$ Grenzübergang $b' \Rightarrow 0, V_0 \Rightarrow \infty; b'V_0 = \text{const.} \cong P$ Potential: δ -Mulden Nach dem Grenzübergang:

$$\frac{P}{Ka'} \cdot \sin Ka' + \cos Ka' = \cos ka'$$

reelle Lösungen: $|\cos ka'| \le 1$

VII.5 Leiter, Isolatoren, Halbleiter

Die $Existenz \ der \ Bänder$ ist bedingt durch die Kopplung von N Atomen (Idee der gekoppelten Pendel; Elektronen mit höchster Energie gehören dem Kristall als Ganzem)

Die Lücken zwischen den Bändern beruhen auf dem streng periodischen Gitter (Atomrümpfe positiv).

Das Valenzband ist das höchste vollbesetzte Band

 $Leitungsband \Rightarrow$ Eigenschaften des Kristall

Klassifizierung über die elektrische Leitfähigkeit



 $j = \frac{I}{A} = \frac{\text{Stromstärke}}{\text{Fläche}}; R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A}; \sigma = \frac{1}{\rho}$, Leitfähigkeit

Abbildung VII.22: Modell eines Leiters

Isolatoren: extrem schlechte Leiter (Diamant, Quarz, NaCl); kovalente Bindungen, Ionenfestkörper

- **Leiter:** extrem hohe Leitfähigkeit (Metalle, Graphit, $Na \rightarrow Na^+ + e^-$); $\sigma_{Cn} \approx 10^{20} \cdot \sigma_{\text{Quarz}}$ $\sigma = \sigma(T) \downarrow, T$ Temperatur; i.a. Abnahme mit steigender Temperatur
- **Halbleiter:** ultrareines Silizium (1 Fremdatom / 10^{14} Si): sehr geringe Eigenleitfähigkeit (praktisch Isolator), aber auch geringe Fremdleitung; $\sigma = \sigma(T) \uparrow$

Erklärung durch das Bändermodell.

¹engl.: "gap"; anderer Ausdruck: "verbotene Zone"



Abbildung VII.23: Prinzipielles Energieschema eines Leiters (Natrium)

Bei angelegter Spannung fließt instantan Strom, weil die Elektronen freie Plätze im 3s-Band vorfinden (ohne eine Lücke überspringen zu müssen)

 $E^e_{\rm kin} = q \cdot U = q \cdot E \cdot l, \qquad q: \ {\rm Ladung}; \ E: \ E{\rm -Feld}$

Die 3s–Elektronen sind frei beweglich \Rightarrow hervorragende Leitfähigkeit = metallische Leitung

Magnesium folgt auf $Na \Rightarrow 3s$ ist voll besetzt \Rightarrow Lücke zum 3p-Niveau (Mg wäre Isolator) Wegen Überlappung mit 3p ist Magnesium ein guter Leiter.

Prinzipielles Energieschema eines Isolators: (Abb. VII.24)



keine thermische Anregung bei 300 K ($kT \sim 0,025 \text{ eV}$)

Abbildung VII.24: Bänder eines Isolators

Der *Diamant* (C) ist ein Isolator, seine Homologen Silizium und Germanium hingegen typische Halbleiter sp^3 -Hybridisierung; *Breite der Lücken:*

$$C: 5, 33 \,\mathrm{eV}$$
 große Lücken \Rightarrow Isolator

$$\begin{array}{c|c}Si: 1, 14 \,\mathrm{eV}\\Ge: 0, 67 \,\mathrm{eV}\end{array} \end{array} Halbleiter (relativ kleine Lücke)$$

Stabile Bindungen sp^3 mit verschiedenen Lücken.

Prinzipielles Energieschema eines Halbleiters:



Abbildung VII.25: Energieschema eines Halbleiters

- 1) Eigenleitung: Anregung von Elektronen aus V ins L (Hinterlassung eines Lochs im V); thermische Anregung allerdings gering bei 300 K
- 2) *Fremdleitung:* Störstellen, imperfekter Kristall, Fremdatome bilden kein Atomgitter aus, zeigen charakteristische Zustände.

 $\sigma \sim e^{\alpha T} \uparrow = \exp \operatorname{mit} T$

Störende Leitung: stochastisches Rauschen, störende Signale

Dramatischer Effekt beim Germanium, weil die Lücke zu klein ist (⇒ flüssiger Sticksoff notwendig)

Wohldefinierte Leitfähigkeit gewünscht: Material mit wohlbekannter und stabiler Leitfähigkeit. Halbleiter: Si, GaAs, Ge ...

Gezielte Dotierung mit Fremdatomen (einstellbare Leitfähigkeit)

a) Einbau von Donatoren (Elektronen–Spender), z.B. der 5. Gruppe des Periodensystems: P, As, Sb werden in das Silizium–Gitter (5-wertig) $\Rightarrow n$ –Leiter (n negative Ladungsträger) (vgl. Abb. VII.26)



Abbildung VII.26: Si + As (n-dotierter Halbleiter)

 b) Einbau von Elektronen-Akzeptoren, z.B. Elemente der 3. Gruppe des Periodensystems: B, In, Al, Ga (Abb. VII.27) Alternativen: GaAs, GaP: III-V-Verbindungen; Mg, S: II-VI-Verbindungen



Abbildung VII.27: Si + B (p-dotierter Halbleiter)



Es bedarf geringer Energie, um Elektronen aus den Donatoren-Niveaus ins Leitungsband zu heben.

Energie

Abbildung VII.28: Niveauschema eines n–Leiters

Akzeptorenniveaus nehmen begierig Elektronen auf aus dem Valenzband. Es bedarf geringer Energie, um Akzeptorenniveaus zu besetzen

Abbildung VII.29: Niveauschema eines p-Leiters

Niveauschemata: (Abb. VII.28 und VII.29)

Anwendungen: Dioden (Schaltelement); n-p-Kontakte, Gleichrichtung, Generatoren, Transistoren, Solarzellen \Rightarrow Elektronik

n-p-Schicht (n-p-Kontakt): Abbildung VII.30



Abbildung VII.30: n-p-Kontaktfläche

VII.6 Elementare Schaltelemente

Wir betrachten den *p*-*n*-*Übergang* Anfangszustand: Abb. VII.31



FERMI-Energie gibt die Energie der höchsten noch besetzten Zustände an.

Abbildung VII.31: Anfangszustand beim p-n-Übergang

Endzustand (nach der Diffusion): Abb. VII.32

 V_0 entsteht ausschließlich durch Diffusion der Ladungsträger (Rekombination von Elektronen aus dem n–Material mit Löchern des p–Materials)

 \Rightarrow Raumladungszone an der Grenzfläche (ladungsträgerfreie Zone)



Abbildung VII.32: Endzustand beim p-n-Übergang, Verbiegen der Bänder

 V_0 heißt Diffusionsspannung ohne äußere Spannung $V_0 \sim E \cdot x_0$; $E \sim 10^7 \frac{V}{m}$, $V_0 \sim 1 \text{ eV}$, $x_0 \sim 10^{-7} \text{ m}$

Anlegen der äußeren Spannung V, die FERMI-Kanten gleichen sich an:

Fall 1:



Elektronen fließen zum \oplus -Pol, die Löcher zum \oplus -Pol. Die Raumladungszone wird verkleinert Man nennt dies die *Durchlassrichtung* der np-Schicht (\Rightarrow guter Leiter)

Fall 2:



Die Raumladungszone wird vergrößert (gesamte n-p–Schicht kann zur ladungsträgerfreien Zone werden im Falle sehr starker Dotierung)

Funktionen:

- 1) Gleichrichter (von Wechselstrom), siehe Abb. VII.33
- 2) Schalter (Diode)



Abbildung VII.33: Effekt eines Gleichrichter

Beispiele für Anwendungen von Dioden:

• ZENER–Diode (höchstdotiert: E_F liegt im Leitungsband der n–Schicht; siehe Abb. VII.34 und VII.35)



Abbildung VII.34: ZENER–Diode



Abbildung VII.35: Kennlinie einer ZENER-Diode

Funktion: Spannungsstabilisierung beim ZENER–Durchbruch, in Sperrichtung betrieben. Die Elektronen aus dem Valenzband fließen zum \oplus –Pol

• Tunneldiode: (schneller Schalter, in Durchlassrichtung betrieben)

Starker Stromanstieg mit wachsender Spannung, weil wegen der hohen Dotierung die Elektronen aus dem Leitungsband (Donatoren) zum \oplus -Pol laufen. (Phase 1)

In der Phase 2 ist das Leitungsband entleert, der Elektronenstrom geht zurück: Fallende Kennlinie, ${\cal R}$ ist negativ

OHMsche Verluste (R > 0) bedeuten Dämpfung von Schwingungen.

Funktion: Entdämpfung von Schwingungen (R < 0)



Abbildung VII.36: Kennlinie einer Tunneldiode

In der Phase 3: normale Diodenkennlinie

• Solarzelle: np–Schicht; aufgrund der Diffusionsspannung V_0 werden Elektronen-Loch–Paare (vom Licht erzeugt, Photoeffekt) in Bewegung versetzt

 \Rightarrow Strom

 Lichtdioden: Durchlassrichtung; Rekombination von Elektronen und Löchern ist erwünscht ⇒ Erzeugung von Licht CoR (III V. Verbindungen) Colliumenhaunhich grünen Licht

GaP (III-V–Verbindungen) Galliumphosphid: grünes Licht

Transistoren

a) Grenzschichttransistor



Abbildung VII.37: npn-Transistor



 R_G : Ersatzwiderstand für die Grenzschicht EB

Abbildung VII.38: Ersatzschaltbild der Basisschaltung

Transistor-Effekt: Die Elektronen tunneln durch die extrem dünne Basisschicht. Die Elektronen des Emitters (Aussender) wandern zum Kollektor

$$\begin{split} I_c \approx I_e, & \text{meist } \frac{I_c}{I_e} \approx 0,98 = \alpha \\ I_b = I_e - I_c & (\text{KIRCHHOFFsche Verzweigung}) \\ \frac{I_b}{I_c} = 1 - \alpha \approx 0,02 \end{split}$$

Wechselstrom:

$$\frac{\Delta I_c}{\Delta I_e} = \alpha, \qquad \Delta I_e = \frac{\Delta V_s}{R_G} \quad (R_G: \text{Signaländerung im Emitterkreis})$$

Ausgangsspannung im Kollektorkreis

$$\Delta V_L = R_L \cdot \Delta I_c = R_L \cdot \Delta I_e \cdot \alpha = R_L \cdot \frac{\Delta V_s}{R_G} \cdot \alpha$$
$$\frac{\Delta V_L}{\Delta V_s} = \alpha \cdot \left[\frac{R_L}{R_G}\right] \qquad Spannungsverstärkung, wenn \ R_L \gg R_G \quad (\alpha \approx 1)$$

Funktion: Impedanz– (Widerstands–) Wandler (aus kleinem Eingangswiderstand R_G wird größerer Ausgangswiderstand R_L)

b) Stromverstärkung (Emitterschaltung)



Abbildung VII.39: Stromverstärkung bei der Emitterschaltung

$$\beta = \frac{\Delta I_c}{\Delta I_b} = \frac{\alpha \cdot \Delta I_e}{\Delta I_b} = \frac{\alpha \cdot \Delta I_e}{\Delta I_e - \Delta I_c} = \frac{\alpha \cdot \Delta I_e}{\Delta I_e - \alpha \cdot \Delta I_e} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \approx 50$$

Stomverstärkung: $\Delta I_c\approx 50\cdot\Delta I_b$ (bei relativ kleinen Änderungen ΔI_b große Änderungen für $\Delta I_c)$



Abbildung VII.40: Emitterschaltung

 $\Rightarrow {\rm Schalter funktion}$

108
Kapitel VIII

Laser

LASER = light amplification of stimulated emission of radiation MASER = microwave amplification of stimulated emission of radiation 1954: MASER = means of attaining support for expensive research¹

VIII.1 Eigenschaften des Lasers

(hängen vom speziellen Lasertyp ab)

a) hohe räumliche Auflösung (Bündelung); hohe zeitliche Auflösung (Kurzzeitlaser)

$$\lambda = \underbrace{0, 1 \, \mu m}_{\rm UV} \, \dots \underbrace{3 \, \rm mm}_{\rm IR}$$

15 Oktaven: $\frac{3000 \ \mu m}{0.1 \ \mu m} \approx 30000 \cong 2^{15}$ bis in den Röntgen-Bereich Leistungen: 1 $\mu W \dots 1$ TW

Dimensionen: 1 mm (Halbleiterlaser) ... 100 m (Fusionslaser) Bündelung ist begrenzt durch die Beugung.

b) Hohe Monochromasie

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \le 10^{-15}$$

 \Rightarrow Frequenznormale, Zeitnormale

c) Hohe Intensitäten cw (kontinuierlich): $1\frac{GW}{cm^2} = 10\frac{TW}{m^2} = \left[\frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche}}\right]$ $\Rightarrow |\vec{E}| \sim 100 \frac{MV}{m}$ (elektrisches Feld) gepulste Laser: kurzzeitige Intensitäten $\Rightarrow 10^{19} \frac{W}{m^2} \Rightarrow |\vec{E}| \sim 60 \frac{GV}{m}$ \Rightarrow hoher Photonenfluss

Energiedichte:

$$\frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{E}|^2 = I \left[\frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche}}\right] \cdot \frac{1}{c} \left[\frac{\text{Zeit}}{\text{Länge}}\right]$$
$$= I \left[\frac{\text{Energie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}\right] \cdot \frac{1}{c} \left[\frac{\text{Zeit}}{\text{Länge}}\right] \left[\frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}}\right]$$

¹Vorsicht, Witz!

Beispiel: $I=1\,\frac{\mathrm{GW}}{\mathrm{cm}^2},\, |\vec{E}|=87\,\frac{\mathrm{MV}}{\mathrm{m}}$

Photonenfluss:
$$\Phi\left[\frac{\text{Zahl der Photonen}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}\right] = n \left[\frac{\text{Zahl der Photonen}}{\text{Volumen}}\right] \cdot c \left[\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}\right]$$

Photonendichten: $n \left[\frac{\text{Zahl der Photonen}}{\text{Volumen}}\right]$

 $I = \Phi \cdot E_{\gamma}, E_{\gamma} = 3, 3 \cdot 10^{-19} \,\mathrm{J},$ Energie der Photonen; $\lambda = 0, 6 \,\mu\mathrm{m}; E_{\gamma} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \, [c = \lambda \cdot \nu]$

$$\Phi = 3 \cdot 10^{27} \, \frac{\text{Photonen}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec}}, \qquad n = \frac{\Phi}{c} = 10^{17} \, \frac{\text{Photonen}}{\text{cm}^3}$$

d) Ultrakurze Impulse

Pulsdauer $\Delta t \leq 10 \,\mathrm{fs} = 10^{-15} \,\mathrm{sec}$ (Abb. VIII.1)



Abbildung VIII.1: Spikes (Ultrakurze Impulse)

Pulslänge $\Delta l = c \cdot \Delta t = 3 \,\mu\text{m}$, wenn $\Delta t = 10^{-15} \sec \lambda = 0, 6 \,\mu\text{m} \Rightarrow 5$ Wellenlängen (Abb. VIII.2)



Abbildung VIII.2: Ultrakurzer Wellenzug (5 Wellenlängen)

e) Kohärenz des Laserlichtes (alle Photonen sind in fester Phasenbeziehung)

VIII.2 Hohlraumstrahlung

führt auf das PLANCKsches Strahlungsgesetz. $(E_{\gamma} = h \cdot \nu)$

Heiße Körper senden aufgrund ihrer fest vorgegebenen Temperatur T elektromagnetische (Wärme-) Strahlung aus. (Glut im Ofen ändert ihre Farbe von rot nach weiss, wenn die Temperatur steigt.)

Gesucht: Spektrale Intensitätsverteilung der Temperaturstrahlung. (Strahlung des schwarzen Körpers) *Realisierung:* Im Hohlraum soll sich die emittierte Strahlung im Gleichgewicht mit der Temperatur des Hohlraums befinden. (Es soll genauso viel emittiert wie absorbiert werden.)

 $\underbrace{u(\nu,T)}_{\text{Energie-dichte}} d\nu = \frac{\text{Strahlungsenergie im Frequenzbereich von } \nu \text{ bis } \nu + d\nu}_{\text{Volumen}} d\nu$

 $u(\nu,T) = \langle \varepsilon \rangle \cdot D(\nu)$

 $D(\nu)$: Zahl der Moden

 $\langle \varepsilon \rangle :$ mittlere Energie aller Photonen in einer Mode pro Frequenz
intervall und Volumen

 $\langle \varepsilon \rangle = \langle n(\nu) \rangle \cdot E_{\gamma}, \qquad (\langle n(\nu) \rangle: \text{ mittlere Anzahl der Photonen in einer Mode})$



Im Hohlraum gibt es quantisierte Zustände (Moden)

Abbildung VIII.3: Hohlraum mit quantisierten Moden

Photonen haben Spin 1 (Bosonen); Bosonen können in beliebiger Zahl eine Mode besetzen (Gegensatz: Fermionen mit halbzahligem Spin)

$$\langle n(\nu) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$D(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \qquad \text{(Beweis siehe Seite 113)}$$

$$\overline{E_{\gamma} = h\nu} \qquad \text{(PLANCK)} \qquad E_{\gamma} \propto \nu$$

$$\overline{u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 \cdot (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)}} \qquad \text{PLANCKsche Strahlungsformel}$$

Vor Planck (klassische Thermodynamik):

$$\langle E_{\gamma} \rangle \sim kT$$

 $u(\nu) = \frac{8\pi kT}{c^3} \cdot \nu^2 \propto \nu^2$

⇒ Die Energiedichte wächst für wachsende Frequenzen ν über alle Grenzen. ("UV–Katastrophe", widerspricht total der gemessenen Hohlraumstrahlung)

VIII.3 Elektromagnetische Übergänge



Abbildung VIII.4: Übergänge zwischen Niveaus

$$\underbrace{\frac{\Delta N_1}{\Delta t}}_{\text{Übergangs-}} = \underbrace{B_{12}}_{\text{Energiedichte}} \cdot \underbrace{u(\nu, T)}_{\text{Energiedichte}} \cdot N_1 \qquad (N_1: \text{Zahl der Atome im Grundzustand (Zustand 1)})$$

Emission nach Anregung: (Abb. VIII.5)



Abbildung VIII.5: Emission

$$\frac{\Delta N_2}{\Delta t} = \underbrace{N_2 \cdot B_{21} u(\nu, T)}_{\substack{\text{durch äußeres} \\ \text{e.m. Feld stimuliert}}} + \underbrace{N_2 \cdot A_{21}}_{(N_2: \text{ Zahl der Atome im angeregten Zustand (Zustand 2))}$$

Gleichgewichtsbedingung (Emission = Absorption)

 $N_1 B_{12} u(\nu, T) = N_2 B_{21} u(\nu, T) + N_2 A_{21}$

BOLTZMANN-Verteilung (regelt thermische Besetzungswahrscheinlichkeit):

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

bei fester T, ν :

$$\Rightarrow \boxed{e^{\frac{h\nu}{kT}} \cdot u(\nu, T) \cdot B_{12} = u(\nu, T) \cdot B_{21} + A_{21}}$$

EINSTEIN:
$$\boxed{B_{21} = B_{12}}$$
$$u(\nu, T) = \frac{\frac{A_{21}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}}{e^{\frac{k\nu}{kT}} - 1} \xrightarrow{\text{Vergleich}}_{\text{mit PLANCK}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$
$$\Rightarrow \boxed{A_{21} = B_{21} \cdot \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}}$$

Wahrscheinlichkeit für die spontane Emission $\propto \nu^3$

 \Rightarrow Großes Problem für die Laser mit hohen Frequenzen (spontane Emission dominiert, wir brauchen aber stimulierte Emission)

VIII.4 Laser

Grundeigenschaften (was brauchen wir für Laser?):

a) Zweizustandssystem, das durch äußere elektromagnetische Felder stimuliert werden kann (mit "richtigem" $\nu)$



- b) Resonator, um die "richtige" Frequenz zu definieren. \Rightarrow Verstärkung (Photonenlawine erzeugen)
- c) Mechanismus, um das Niveau immer wieder aufzufüllen. \Rightarrow Pumpen der Photonen

Besetzungsumkehrung

Aufgrund der BOLTZMANN–Verteilung sind sehr wenige angeregte Atome (N_2) vorhanden. Es muss aber $N_2 > N_1$ gelten! (Abb. VIII.6)



 $N_2 > N_1$

mehr angeregte Atome als Grundzustandsatome

Abbildung VIII.6: Pumpen

$$\underbrace{\frac{dn(\nu)}{dt}}_{\substack{\text{Anderung der}\\ \text{Photonenzahl in}\\ \text{dem Zeitintervall}}} = \underbrace{N_2 u(\nu) B_{21}}_{\text{stim. E.}} + \underbrace{N_2 A_{21}}_{\text{spontane E.}} - \underbrace{N_1 u(\nu) B_{12}}_{\text{Absorption}} - \underbrace{\frac{\langle n(\nu) \rangle}{\tau_0}}_{\text{Verluste}}$$

Mit

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot h\nu \cdot \langle n(\nu) \rangle; \quad B_{21} = B_{12}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{A_{21}}{B_{21}} &= \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \\ \Rightarrow & \frac{du(\nu)}{dt} = \left(N_2A_{21} - N_1A_{21} - \frac{1}{\tau_0}\right) \cdot \langle n \rangle + N_2A_{21} \ge N_2A_{21} \\ \Rightarrow & \text{Besetzungsumkehr liegt vor, wenn gilt:} \\ N_2A_{21} - N_1A_{21} - \frac{1}{\tau_0} \ge 0 \\ \hline N_2 - N_1 \ge \frac{1}{A_{21}\tau_0} \ge 0 \end{aligned}$$

Prinzip des Lasers:

(Abb. VIII.7) Optisches Pumpen: (Abb. VIII.8 und VIII.9)

$$u(\nu, T) = \langle \varepsilon \rangle \cdot D(\nu)$$

Noch zu zeigen:

$$D(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}, \qquad \left\langle n(\nu) \right\rangle = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Abzählen der Moden (Zustände) im Hohlraum: (siehe auch Abb. VIII.10)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$
 Quantenzahlen in 3 Dimensionen



Abbildung VIII.7: Aufbau eines Lasers (schematisch)



Abbildung VIII.8: optisches Pumpen beim 2-Niveau–Laser



Abbildung VIII.9: 3-Niveau–Laser



Abbildung VIII.10: Kugel im abstrakten n-Raum

$$\begin{split} k &= \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{Wellenzahl} \\ k &= \frac{n\pi}{a} \qquad (\text{vgl. VI.4}) \\ n &= \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}, \qquad n = \frac{ak}{\pi} \end{split}$$

In einem Oktanden ($\frac{1}{8}$ der Kugel): $N = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi n^3$

$$N = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot \frac{a^3 k^3}{\pi^3} \quad \text{Zahl der Moden bis zum Radius } n$$
$$\frac{\text{Zahl der Moden}}{\text{Volumen}} = \frac{dN}{dV} = \frac{1}{6} \cdot \frac{k^3}{\pi^2}, \qquad a^3 = \text{Volumen } V$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$$
$$\frac{dN}{dV \cdot d\nu} = \frac{8\pi}{2} \cdot \frac{\nu^2}{c^3}$$

noch Faktor 2 wegen 2 Polarisationsrichtungen (Spin der Photonen ist $1\hbar$, kann nur parallel oder antiparallel zur Ausbreitungsrichtung sein: links oder rechts zirkular polarisiertes Licht)

$$\Rightarrow D(\nu) = 2 \cdot \frac{dN}{dV \ d\nu} = 8\pi \cdot \frac{\nu^2}{c^3}$$

Noch zu zeigen, dass $\langle n(\nu) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ gilt:



Im thermischen Gleichgewicht (bei Temperatur T):

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{h\nu}{kT}} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \qquad (\text{Boltzmann-Verteilung})$$

Absorptionsrate: = $N_1 \cdot \langle n \rangle \cdot |a|^2$ ($\langle n \rangle$: Zahl der angebotenen Photonen)

 \Downarrow gleichsetzen

Emissionsrate: = $N_2 \cdot (\langle n \rangle + 1) \cdot |a|^2$ (1 Photon mehr, weil nach der Emission die Zahl der Photonen $\langle n \rangle$ sein soll.

$$\frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle + 1} = \frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \quad \langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Die Laserstrahlung ist kohärent (alle Photonen sind in fester Phasenbeziehung). Dies ist eine Konsequenz der HEISENBERGschen Unschärfebeziehung. $\Delta E \Delta t \sim h$ (ΔE : Energieunschärfe der Photonen, die von den verschiedenen angeregten Atomen emittiert werden)

$$\begin{split} \Delta(Nh\nu) \, \Delta t \sim h, \qquad \nu = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \\ \Delta N \, \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \cdot \Delta t \sim 1 \\ \underbrace{\Delta N}_{\text{groß}} \, \underbrace{\Delta \Phi}_{\text{klein}} \sim 1 \end{split}$$

 $\Delta \Phi$: Phasenunschärfe der Photonen wird sehr klein, wenn die Zahl der Übergänge groß wird.

Anhang A

Index

Α

Ablösearbeit, 56 Akzeptor, 101 AMPÈREsches Gesetz, 9 Annihilation, 54 Atomkern, 76 Aufenthaltswahrscheinlichkeit, 63 Auflösungsvermögen bezüglich λ , 48 bezüglich θ , 45 Azimutwinkel, 78

В

Bäuche, 35 **BABINETSches** Prinzip, 48 Bänder, 93 Bahndrehimpulsquantenzahl, 81 BALMER-Serie, 84 Bandgrenze, 95 Besetzungsumkehr, 113 Beugung, 41 Beugungsgitter, 47 Bindungen ionische, 89 kovalente, 89 metallische, 90 **BOHR**, 77 BOLTZMANN-Konstante, 87 Bosonen, 85, 111 BRAGGsche Beziehung, 50 Brechungsgesetz, SNELLIUSsches, 25 Brechungsindex, 24, 25

С

CERENKOV-Strahlung, 31 COMPTON-Effekt, 51 COMPTON-Wellenlänge, 53 COULOMB-Potential, 72

D

DE-BROGLIE-Beziehung, 58, 62, 66

Deuterium, 77 Diamant, 90 Diffusionsspannung, 104 Diode, 104 Dipol, HERTZSCHER, 13 Dipolmoment, 13 DIRAC-Gleichung, 77 Dispersion, 24 Donator, 101 DOPPLER-Verschiebung, 29 Dotierung, 101 Drehimpuls, 79, 80 Dualismus, 6 Dualismus, 6

\mathbf{E}

ebene Wellen, 7 Eigendrehimpuls, 85 Eigenschwingung, 38 Eigenzustände, 39 Elektronen, 51, 54, 59, 72, 93 Hülle, 76 lokalisiert, 92 Potentialberg, 67 Spin, 85, 88 Valenz-, 88, 92 Energie, 11, 22, 62 Bänder, 93 Eigenwerte, 75, 77 elektromagnetische Welle, 12 Nullpunkt-, 74 quantisiert, 74 Energiedichte, 12 elektromagnetische Welle, 14 Energieinhalt, 12 Energiesatz, 51 Energieschema, 75

\mathbf{F}

FERMI-Energie, 96 Fermionen, 85 Fernfeld, 14 FOURIER -Analyse, 16, 62 -Integral, 19 -Reihe, 15 -Theorem, 15 Fullerene, 90

G

Gangunterschied, 34 Gitterspektrograph, 47 Gleichrichter, 104 Graphit, 90 Grenzwinkel Totalreflexion, 26 Grundzustand, 39 Gruppengeschwindigkeit, 23, 59

Η

h, 10, 49, 54 $\hbar, 54$ Halbleiter, 99 Harmonische, 15 Hauptquantenzahl, 81 HEISENBERGsche Unschärfebeziehung, 22, 60, 62 Helium, 77, 88 HERTZscher Dipol, 13 Hohlraumstrahlung, 110 HUBBLE-Konstante, 32 HUYGENSsches Prinzip, 43 Hybridisierung, 88 Hyperbel, 35

Ι

Impuls, 53, 54
Dreh- siehe Drehimpuls 13
elektromagnetische Welle, 13
Photon, 53
Impulsatz, 51
Impulsunschärfe, 62
Interferenz, 34, 41
Ionen, 89
Isolator, 99
Isotop, 77

K

Kern, 76 KIRCHHOFFsches Beugungsintegral, 44 KIRCHHOFFsches Prinzip, 43 Knoten, 35 Kochsalz, 89 kohärent, 35 Kohärenz, 110 Kohlenstoff, 88 KRONIG-PENNEY-Potential, 98 Kugelfunktion, 80

\mathbf{L}

l siehe Bahndrehimpulsquantenzahl 81 Ladungsdichte, 7 LAPLACE-Operator Δ , 9 Laser, 35, 109, 112 LED, 106 Leitungsband, 93, 99 Licht, 54 Linienspektrum, 17 Lithium, 88 Lücken, 98 LYMAN-Serie, 84

\mathbf{M}

MACHsche Zahl, 29 Maser, 69, 109 Massenzahl, 76 Materiefelder, 58 MAXWELLsche Gleichungen, 7 MAXWELLscher Verschiebungsstrom, 9 Mehrelektronensysteme, 87 Monochromasie, 109 Multiplizität, 88

Ν

n siehe Hauptquantenzahl 81 Neutron, 76 Niveauschema, 75 Nullpunktenergie, 74

0

Oberfrequenz, 15 Ordnungszahl, 76 Ortsunschärfe, 62

Ρ

Paarvernichtung, 54 PAULI-Prinzip, 77 Periodensystem, 87 Phasenraum, 63 Photo-Effekt, 56 Photonen, 5, 11, 51, 111 Photonenhülle, 54 Photostrom, 58 PLANCKsches Wirkungsquantum, 54 Polarkoordinaten, 78 Potentialkasten, 72 dreidimensional, 75 Potentialstufe, 67 Proton, 76 Puls, 19

\mathbf{Q}

Quabla-Operator \Box , 9 Quantenfeld
theorie, 6

INDEX

Quantenzahl, 74 Drehimpuls-, 81 Gesamtdrehimpuls-, 87 Haupt-, 81 magnetische, 81 quasiperiodisch, 19

R

Radiointerferometrie, 37, 46 Radioteleskop, 46 Raumladungszone, 103 Reflexion, 25 Total-, 26 Rekombination, 103 Relativgeschwindigkeit, 29 Richtcharakteristik, 37 Rotverschiebung, 31 RYDBERG-Konstante, 84

\mathbf{S}

SCHRÖDINGER-Gleichung, 65 radiale, 79 Schwellenfrequenz, 58 Sekundärwelle, 43 Singulett, 88 SNELLIUSsches Brechungsgesetz, 25 Solarzelle, 106 SOMMERFELD-Konstante, 84 Spektrallinien, 86 Spiegelteleskop, 46 Spin, 85 Spin-Bahn-Kopplung, 86 stationärer Zustand, 74 stehende Wellen, 37 Stickstoff, 69 Streuamplitude, 49 Superposition, 34

Т

Teilchengeschwindigkeit, 59 Temperaturstrahlung, 110 Totalreflexion, 26 Triplett, 88 Tritium, 77 Tunneldiode, 105 Tunneleffekt, 69, 92

U

Unschärfebeziehung, 21 Impuls, 62 Ort, 62 Uran, 77

V

Vakuumpolarisation, 54 Valenzband, 93, 99 Valenzelektron, 88, 92

W

Wahrscheinlichkeitsamplitude, 63 Wasserstoff, 64, 69, 72, 85, 88 Niveauschema, 86 Quantenzahlen, 87 Wellen ebene, 7 stehende, 37 Wellengleichung, 7 Wellenpaket, 23, 59 Wellenzahl, 7 Wellenzug, 19 Winkelauflösungsvermögen, 45

Y

YOUNGscher Versuch, 35

\mathbf{Z}

ZENER-Diode, 105 Zustand stationärer, 74

Anhang B

Abbildungsverzeichnis

IV.1	Austausch von Impuls als Informationsübertragung	5
IV.2	Ausbreitung von Störungen bzw. Wellen	6
IV.3	Fortpflanzung einer Welle im Raum	8
IV.4	elektrischer Dipol	13
IV.5	Dipolschwingung im Raum	15
IV.6	Beispiel eines Linienspektrums	18
IV.7	Wellenzug, Puls (quasiperiodisch)	19
IV.8	Einfacher Puls	19
IV.9	Periodische Fortsetzung eines Pulses	20
IV.10	quasimonochromatischer Puls	20
IV.11	kontinuierliches Frequenzspektrum	21
IV.12	Wechselwirkung durch Energie– und Impulsaustausch	22
IV.13	endlicher Wellenzug	23
IV.14	Schwebung	23
IV.15	Brechung von Licht im Prisma	24
IV.16	Reflexion und Brechung	25
IV.17	Mögliche Brechungsarten	25
IV.18	Brechung und die auftretenden Winkel	26
IV.19	Ausbreitung einer Welle im ruhenden Medium	27
IV.20	Wellenausbreitung bei bewegter Quelle	27
IV.21	Bewegter Sender und Empfänger	28
IV.22	DOPPLER-Verschiebung bei nichtparallelen Bewegungsrichtungen	29
IV.23	MACHscher Kegel	30
IV.24	MACHscher Kegel für $v = v_Q$	30
IV.25	angeregte Zustände des Wasserstoff-Atoms	31
IV.26	Spektrallinien, Intensitäten	31
IV.27	DOPPLER-Verschiebung der Spektrallinien	32
IV.28	Beobachtung von HUBBLE	32
IV.29	Drift der Galaxien nach dem Urknall	32
IV.30	Flucht der Galaxien unter Berücksichtigung der Masse	33
IV.31	Immerwährende Expansion oder immer wieder ein "Urknall"?	33
IV.32	Interferenz zweier synchron schwingender Quellen	36

IV.33	Einfallende, reflektierte und daraus resultierende stehende Welle	37
IV.34	Stehende Welle bei 2 festen Enden	38
IV.35	n = 1: Grundfrequenz	39
IV.36	n = 2: erster angeregter Zustand	39
IV.37	n = 3: zweiter angeregter Zustand	40
IV.38	eingespannte Membran	40
IV.39	Hohlraumresonator	41
IV.40	Unschärfebeziehungen	42
IV.41	Phasen– und Gruppengeschwindigkeit	42
IV.42	Teilchenstrahl ohne Beugung	42
IV.43	Beugung einer Welle an der Blende	42
IV.44	Wellenfront mit Elementarwellen nach HUYGENS	43
IV.45	Auslaufende (gebeugte) Welle, betrachtet am Punkt P	43
IV.46	Beugung am Spalt	44
IV.47	Beugungsbild des Spaltes (Blende)	45
IV.48	Interferenz zweier synchron schwingender Quellen	45
IV.49	Winkelauflösungsvermögen nach LORD RAYLEIGH	46
IV.50	Auf den Mond gerichtetes Teleskop	47
IV.51	Young'scher Doppelspaltversuch	47
IV.52	Beugung am Gitter	48
IV.53	Streuung am Atom	49
IV.54	Strukturuntersuchung an 3-dim. Gitter (Kristallen) mit Röntgen-Strahlung	49
IV.55	Reflexion und Streuung; Gitterebenen	50
V.1	Elektromagnetische Welle der Wellenlänge λ wird am Elektron gestreut	51
V.2	Spektren bezüglich λ	52
V.3	Energie– und Impulssatz beim COMPTON-Effekt	52
V.4	Einziger Baustein der Quantenelektrodynamik (QED)	54
V.5	Quantenelektrodynamik beim COMPTON-Effekt	55
V.6	Paarvernichtung (Annihilation)	55
V.7	Vakuumpolarisation	55
V.8	DIRAC-See	56
V.9	Selbstenergie eines Elektrons (Photonenhülle)	56
V.10	Experiment zum Photo–Effekt	56
V.11	Befund beim Photo-Effekt	57
V.12	Feynman-Graph zum Photo-Effekt	57
V.13	Experiment zur Elektronenlokalisation	60
V.14	Interferenzversuche mit Wellen und Teilchen	61
V.15	"Geborgte" Energie zur Erzeugung eines Z^0 –Teilchens	62
V.16	Unscharfer Energiezustand eines angeregten Atoms	62
V.17	Klassische Sicht links und die HEISENBERGsche Unschärfebeziehung rechts	63
V.18	H-Atom, klassisch gesehen	64
V.19	H-Atom, unter Berücksichtigung der Unschärferelation	64
VI.1	Potentialstufe	67
VI.2	unendlich lange Potentialstufe	69

VI.3	endlich breite Barriere $(E(x))$	70
VI.4	endlich breite Barriere (ψ)	70
VI.5	Tunneleffekt	70
VI.6	Potentialbarriere beim Uran–Kern	71
VI.7	Tunneleffekt beim Ammoniak	71
VI.8	Unendlich tiefer Potentialkasten	72
VI.9	COULOMB–Potential; Elektronen im <i>H</i> –Atom	72
VI.10	H_2 -Molekül	73
VI.11	Nukleonen im Kern	73
VI.12	Niveau–Schema	75
VI.13	äquidistante Zustände	76
VI.14	Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $(Z = 1)$	77
VI.15	Polarkoordinaten	78
VI.16	Rotation und überlagerte Oszillation	80
VI.17	Gequantelte Richtungen des Bahn-Drehimpulses	82
VI.18	Bohrsches Atommodell	83
VI.19	Übergänge zwischen den Energieniveaus	84
VI.20	Gequantelte Richtungen des Elektronen-Drehimpulses	85
VI.21	BIOT-SAVARTsches–Gesetz; klassische Elektrodynamik	86
VI.22	Niveauschema des <i>H</i> -Atoms	86
VI.23	paralleler Elektronenspin beim C -Atom	88
VII.1	Kristall (kubisch–flächenzentriert)	89
VII.2	Ionische Bindung (NaCl-Kristall)	89
VII.3	kovalente Bindung beim H_2 -Molekül	90
VII.4	Tetraeder beim C -Atom (Diamant)	90
VII.5	Metallische Bindung (Na^+)	90
VII.6	VAN-DER-WAALS-Kräfte beim Benzol	91
VII.7	Wasser mit Dipolmoment	91
VII.8	Periodisches Potential	91
VII.9	Periodische Potentiale und Tunneleffekt	92
VII.10	2 Pendel (Federn): 2 Fundamentalschwingungen	92
VII.11	Aufspaltung der Frequenzen bei N Pendel $\Rightarrow N$ Frequenzen $\dots \dots \dots$	93
VII.12	n-fache Aufspaltung der Frequenzen bei n Atomen	93
VII.13	unendlich tiefer Potentialtopf und Energiebänder	93
VII.14	Valenzband (Leitungsband) bei angelegtem elektrischen Feld	94
VII.15	(zunächst vernachlässigte) Periodizität im Gitter	94
VII.16	$E(\vec{k})$ -Funktion bei vernachlässigter Periodizität	95
VII.17	Abstrakter \vec{n} -Raum	95
VII.18	Besetzungsfunktion	96
VII.19	Reflexion von Elektronenwellen an der Grenzfläche	97
VII.20	periodisches Potential	98
VII.21	Potentialberg zwischen den Atomen	99
VII.22	Modell eines Leiters	99
VII.23	Prinzipielles Energieschema eines Leiters (Natrium)	100
VII.24	Bänder eines Isolators	100

VII.25	Energieschema eines Halbleiters	101
VII.26	Si + As (n-dotierter Halbleiter)	101
VII.27	Si + B (p-dotierter Halbleiter)	102
VII.28	Niveauschema eines n–Leiters	102
VII.29	Niveauschema eines p–Leiters	102
VII.30	n-p–Kontaktfläche	103
VII.31	Anfangszustand beim p-n–Übergang	103
VII.32	Endzustand beim p-n–Übergang, Verbiegen der Bänder	104
VII.33	Effekt eines Gleichrichter	105
VII.34	ZENER-Diode	105
VII.35	Kennlinie einer ZENER–Diode	105
VII.36	Kennlinie einer Tunneldiode	106
VII.37	npn–Transistor	106
VII.38	Ersatzschaltbild der Basisschaltung	107
VII.39	Stromverstärkung bei der Emitterschaltung	107
VII.40	Emitterschaltung	108
VIII.1	Spikes (Ultrakurze Impulse)	110
VIII.2	Ultrakurzer Wellenzug (5 Wellenlängen)	110
VIII.3	Hohlraum mit quantisierten Moden	111
VIII.4	Übergänge zwischen Niveaus	111
VIII.5	Emission	112
VIII.6	Pumpen	113
VIII.7	Aufbau eines Lasers (schematisch)	114
VIII.8	optisches Pumpen beim 2-Niveau–Laser	114
VIII.9	3-Niveau–Laser	114
VIII.10	Kugel im abstrakten <i>n</i> -Raum	115

Anhang C

Literaturverzeichnis

- [1] TIPLER, PAUL A., Physik, Spektrum Akademischer Verlag, 2000
- [2] VOGEL, H., Gerthsen Physik, Springer Verlag, 20. Auflage, 1999
- [3] OREAR, J., Physik, Hanser Verlag München, 1991
- [4] GARCIA, N., DAMASK, A.C., Physics for Computer Science Students, 2. Auflage, Springer Verlag, 1998
- [5] STREHLOW, R., Grundzüge der Physik, Vieweg-Verlag, 1995
- [6] JACKSON, *Electrodynamics*
- [7] FEYNMAN, Feynman Lectures III

Anhang D

Internet-Verweise

- [1] http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~bartsch/kluge/
- [2] http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~feindt/
- [3] http://home.a-city.de/walter.fendt/phd.htm
- [4] http://physicsweb.org/TIPTOP/VLAB/
- [5] http://didaktik.physik.uni-wuerzburg.de/~pkrahmer/home/java1.html
- [6] http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/springWave/springWave.html
- [7] http://surendranath.tripod.com/
- [8] http://www.netzmedien.de/software/download/java/polarisation/
- [9] http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cuantica/sternGerlach/sternGerlach.htm
- [10] http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cuantica/escalon2/escalon2.htm
- [11] http://www.physics.nwu.edu/ugrad/vpl/atomic/hydrogen.html
- [12] http://www.ba.infn.it/~zito/museo/frame26.html
- [13] http://www.ba.infn.it/~zito/museo/frame37.html
- [14] http://www.ba.infn.it/~zito/museo/frame68.html
- [15] http://www.ba.infn.it/~zito/museo/frame81.html
- [16] http://lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/kap29/Bohr/app.htm
- [17] http://lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/period/electron.htm

— Sag' niemals ν —